



*Entropy: time, irreversibility
and the anthropic delusion*

Pressão em poços
de petróleo: soluções analíticas

Impressão 3D de peças
em PLA

EDIÇÃO ESPECIAL: ótimo 2021 aos nossos autores!

ISSN 2526-4192

INICE

ARTIGOS ORIGINAIS

THE WAY OF ENTROPY:

From Lagrangian Modelling to Thermal Engineering

Nilo Serpa, Gisele Alves Fernandes

1-16

REVISÃO E IMPLEMENTAÇÃO DE SOLUÇÕES PARA A DETERMINAÇÃO DA PRESSÃO EM POÇOS DE PETRÓLEO

Igor C. Cariello, Paulo de Tarço H. Junior , Grazione de Souza, Helio Pedro A. Souto

17-32

INFLUÊNCIA DA DENSIDADE DE PREENCHIMENTO E DO NÚMERO DE PERÍMETROS NAS PROPRIEDADES MECÂNICAS DE PEÇAS FABRICADAS EM PLA A PARTIR DE IMPRESSÃO 3D

Magno M. de Medeiros, Marlon C. da Silva, Daniella M. de Oliveira,
Fábio D. R. dos Santos, Luanda Kívia de O. Rodrigues

33-39



The Way of Entropy: from Lagrangian Modelling to Thermal Engineering

Nilo Serpa

Centro Universitário ICESP, Brazil.

Université des Sciences de l'Homme de Paris - ULSHP, France.

Gisele Alves Fernandes

Centro Universitário ICESP, Brazil.

Abstract: This article discusses the concept of entropy in an alternative thermodynamic view, demonstrating dialectically that the reversibility illustrated in common laboratory practice is only a local technical effect resulting from anthropic processes that slow down the irreversible advance of the disorder. Then, negative entropy is only a fiction stemming from the imaginationist idealism. The Lagrangian formalism is applied from the introduction of the idea of temporal confinement of thermal energy states, with time being interpreted as the basis of an evolutionary variable. The acceleration of entropy is formally presented independently of statistical mechanics.

Key words: thermodynamics, entropy, entropy acceleration, irreversibility.

Resumo: O presente artigo discute o conceito de entropia numa visão termodinâmica alternativa, demonstrando dialeticamente que a reversibilidade ilustrada na prática laboratorial comum é apenas um efeito técnico local decorrente de processos antrópicos que desaceleram o avanço irreversível da desordem. Dessa forma, entropia negativa é uma ficção decorrente do idealismo imaginaçãoista. O formalismo Lagrangeano é aplicado a partir da introdução da ideia de confinamento temporal dos estados de energia térmica, com o tempo sendo interpretado como base de uma variável evolutiva. A aceleração da entropia é formalmente apresentada de modo independente da mecânica estatística.

Palavras-chave: termodinâmica, entropia, aceleração da entropia, irreversibilidade.

Corresponding author: Nilo Serpa, nilo.serpa@icesp.edu.br

Received: 10 Oct 2019 / Accepted: 04 Nov 2019 / Published: 27 Oct 2019.

Prologue

A science is any discipline in which the fool of this generation can go beyond the point reached by the genius of the last generation.

Max Gluckman

During 20th century, some economists took thermodynamics as the basis for building theories about the environmental cost of the liberal-capitalist production model, giving rise to bioeconomy — or ecological economy —, of which Georgescu-Roegen is often acclaimed as the founder. Due to the semi-scientific nature of economy, those authors were and continue to be criticized, probably because their approaches in general were not very formal. However, despite the lack of formalism, the

thermodynamic nature of the bioeconomic discourse cannot be ignored in view of the vast evidence of environmental degradation caused by mass industrialization, with clear irreversible consequences.

There are many ways to observe the entropic character of our existence as a species capable of developing technological culture, starting with the belief that we are the supreme result of evolution. The subjective theories that interpret the probabilistic models and the arrow of time as artefacts of ignorance and not as representative schemes of an objective reality are solely distorted echoes of participatory or strong versions of the anthropic principle. We are fascinated by the idea that intelligence is at the top of the order, something very doubtful. Apparently, intelligence has been much more disruptive of the order than constructive, much more entropic than any force of nature; complex, no doubt, but dangerous.

Particular emphasis is placed here on the fact that complexity, as an evolutionary aspect, does not necessarily mean progress (in terms of increasing order).

The depreciation of language by technological means of communication has been also a marked factor in increasing entropy with respect to social behaviour and quality of what is produced culturally speaking. From the point of view of the *intelligentsia*, it is a fact that the number of genuine great minds qualified to leading transformations on knowledge is decreasing, or they are muting (if this is just a phase in a wider cycle, only time shall tell us; the outstanding fact is that never in human history has there been so much technology available for consumption as today). This is clearly seen in the quality of literature in general, in music and in visual arts. One factor that certainly contributes to this phenomenon is that technology has occupied a large part of humanity's lifetime; we even dare to say that it tends to definitely obstruct access to science by society, if not even replace science itself; technological dazzle is making us less and less able to reflect constructively. Noise, bad taste, corruption and wickedness have prevailed in our daily lives alongside unrestrained consumerism, the social and environmental cost of which we wouldn't risk estimating. All of this converges in the same direction of time and, therefore, of entropy.

The scraps that humanity leaves wherever it goes are the most evident material evidence of the progressive degradation of the terrestrial system, debris of a civilization that bet all its chips on an overwhelming industrialism towards the depletion of planetary natural resources. The old adage of economy that "man will always be in a position to find new sources of energy and to invent new ways to control them, for his benefit" is becoming more and more overt as the myth that it has always been. In addition, we have long realized that the strength of those who seek to achieve and defend common good and protect the greatness of our Pale Blue Dot — as Sagan poetically called the planet Earth [24] — is much less than the strength of the predatory organizations that control the destiny of the world.

We thus see that the most immediate laboratory for verifying the generalization of the growth of entropy with time is the planet Earth. On the progress of entropy over time, Rifkin was quite emphatic:

"[...] time as we experience it is irreversible. Time only goes in one direction, and that is forward. That forward direction, in turn, is a function of the change in entropy. Time reflects the change in energy from concentration to diffusion or from order to increasing disorder. If the entropy process could be reversed, then everything that has been done could be undone." [22]

Disagreements about the concept of entropy are well known. The reader can find an interesting discussion of these divergences in Swendsen [29]. Due to the great diversity of views about the very meaning of entropy, we decided to re-discuss entropy based on three statements:

1. There is no isolated system;
2. There is no negative entropy;
3. There is no absolute reversibility.

With respect to the first proposition, it is sufficient to refer the reader to the arguments of Borel [5], who proved that no finite physical system can be considered closed. The last proposition is the result of a finding so beautifully presented by Planck:

"*Un processus qui ne pouvait en aucune manière être complètement retourné, je l'appelai un 'processus naturel'. Le terme devenu d'un usage universel pour exprimer l'idée est aujourd'hui: irréversible.*" [18]

As for what we call "reversible process", there is no better definition than Norton's:

"*The label 'thermodynamically reversible process' denotes a set of irreversible processes in a thermal system, delimited by the set of equilibrium states.*" [17]

Under the hypothesis of controllability — the basis of all human action —, we can get second proposition and summarize everything that has been said in the three statements as follows: outside the classic mechanistic approach, there is only technical reversibility, that is, one produced anthropically outwards the natural course of events, at the expense of a considerable amount of energy, giving the impression of an entropic reversal between two states of equilibrium.

So, we think that a good way to phrase the heart of the discussion raised is to make a small correction to an observation by Aldous Huxley:

"*We think of time as [...] something moving irreversibly in one direction. The whole idea is expressed in the scientific notion of increasing entropy: we move continuously in one direction and life is a temporary cancellation of entropy within a larger system.*" [10],

rewriting as:

"*We think of time as [...] something moving irreversibly in one direction. The whole idea is expressed in the scientific notion of increasing entropy: we move continuously in one direction and life is a temporary deceleration of entropy within a larger system.*"

Then, we can say that, according to the second law of thermodynamics slightly modified, in every natural process, the sum of all accelerations and decelerations of entropy, in all bodies involved in the process, always points to a global acceleration.



 AGAINST IMAGINATIONIST IDEALISM

Formalizing thermal irreversibility

Starting with an infinitesimal moment immediately before the Big-Bang, everything was just radiation "contained" in a kind of a micro-limbo that we may call "ab-space" (ab = separated + space), the "first cause", without which there is no evolution, where no energy was dissipated. The Big-Bang was, as it were, the beginning of the advance of entropy, the beginning of dissipation and, consequently, of degradation. This was a phase of very low entropy, the lower limit that marked the initial state of our universe, something similar to a hermetically sealed box containing a corpuscular gas in which all the particles were arranged in a single wall of the box.

So, the second law of thermodynamics bequeathed us the possibility of starting from a phenomenal evolutionary perspective more complete and consistent with the current model of the universe supported by modern cosmology. Leaving aside the old imaginationist idealism, present in the debates of a pre-Einsteinian physics still unaware of the ideas of cosmic expansion and Big-Bang, we can free the entropy of the obscure notions that surround it. One of these obscure notions, purely idealistic and absolutely unnecessary, is that of negentropy. It was born under strong influence of mechanics in the subjective propositional context that assumes local order as a result of the inversion of the general trend of degradation, in such a way that, with more local systems of positive entropy than of negative entropy, the global balance would always be of positive and increasing entropy.



Our first thinkings on thermodynamics had the main objective of detaching it from the recurrent attempts to make it more mechanistic. In fact, such attempts reflected, from modernism, the idea of an industrious and orderly world in which mechanics was the discipline of order par excellence. Such a glorious and progressive world could not accept a science that described the degenerating reality of this ephemeral order as something inexorable; not after Victor Hugo's lyrical speeches about progress and the wonderful times to come. Even Poincaré was enthusiastic about industry:

"If I take industrial development as a good thing, it is not just because it offers a good argument to the defenders of science; it is mainly because it gives the scientist faith in himself, and also because it provides an immense body of experience [...]." [19]

The world built and centered on the laws of mechanics is the culmination of a true anthropic manifesto, the extension of the mechanisms that characterize our own most trivial everyday actions. In an industrialist society, mechanisms not only enchant people, but serve as references for the progress. As Bachelard said so well,

"It is customary to imagine that this general reference to the mechanism stems from the fact that we are a center that produces forces and that we can thus awaken, dynamize the geometry of movements that, without it, would be an useless spectacle." [2]

In the words of Rifkin,

"The mechanical paradigm proved to be irresistible. It was simple, it was predictable, and above all it worked. Here, it appeared, was the long-sought-for explanation of how the universe functioned. There was an order to things, and that order could be ascertained by mathematical formulas and scientific observation." [22]

In aid of the perfect anthropic order model, statistical mechanics introduced attenuating arguments showing that all was not lost.

Certainly, for complex systems the Boltzmann-Gibbs entropic form for non-equilibrium,

$$S[P] = -k \int_{-\infty}^{+\infty} dx P(x, t) \ln[P(x, t)],$$

cannot be generalized, especially in the presence of long-range memory. In such cases, we may start by establishing the probabilistic view of entropy production over time, given by the usual way

$$\frac{dS[P]}{dt} = \Pi - \Phi,$$

where Π represents the rate of entropy production in an irreversible process and Φ denotes the flow of entropy from the system to the environment per unit of time; thereof, we proceed, for instance, to the analysis of evolution of probabilities distribution with Fokker-Planck nonlinear formalism for which it is convenient to relate the production of entropy to a current of probability $J(x, t)$ as from,

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial J(x, t)}{\partial x}.$$

Thus, from the non-linear Fokker-Planck equation it is possible to obtain for a defined boundary

$$\frac{d}{dt} S[P] = -2k\lambda \int_{-\bar{x}(t)}^{\bar{x}(t)} dx J(x, t) \frac{\partial P(x, t)}{\partial x},$$

where λ denotes a characteristic distance of the system called "London penetration length". An analytical deepening in this line is out of the scope of present work, since



we are not interested in dealing with a statistical entropy at this moment. For more details, we recommend, for instance, Balescu (1975)[3].

The reader must understand that the theory we defend does not intend to substantiate a critique of probabilistic models. We recognize that Statistical Mechanics has contributed considerably to the understanding of non-equilibrium phenomena. However, as Sproviero has well observed regarding the law of entropy,

"... there is an attempt to 'mitigate' it in two ways: or by trying to deprive it of universality, by means of a new science, *Statistical Mechanics (Ludwig Boltzmann)*, in which (in the sub-atomic world) there could be exceptions; or trying to recognize practical meaning to it only for long cycles such as the 'apagón' of the sun, predicted for cosmic periods of time." [28].

Thus, we do not want to mitigate the role of entropy in the understanding of reality (quite the opposite!), nor to give way to imaginationist idealism. Our debate is aimed at clarifying some points regarding the understanding of the role of entropy and its relationship with the emergence of complexities.

Thermal energy in Lagrangian perspective

In former works, our classic Lagrangian representation of thermal energy was inspired by Louis de Broglie's discussions on relativistic thermodynamics[6] starting with the expression

$$L = -M_0c^2\sqrt{1 - \beta^2}, (\beta^2 = \frac{v^2}{c^2})$$

from which he represented a particle as a small heat reservoir in a reference system within which it moves at speed βc , such that

$$Q = Q_0\sqrt{1 - \beta^2} = M_0c^2\sqrt{1 - \beta^2}.$$

The idea of small reservoirs of thermal energy remained, however, not as particles but as small intervals of time. Subsequently, the introduction of a caloric field generalized the initial idea [26], starting to address the interactions between matter and thermal energy at different levels. In particular, the theory of caloric fields, as we have called it, was applied in the description of thermodynamic processes of condensed matter transformations[26]. Since then, relevant questions have been raised by collaborators about the association between entropy and time arrow, a subject that still generates great confusion.

Now, it is deduced from the second law that order can increase locally, as long as disorder in the neighbourhood increases. Since the increase in disorder reflects the increase in entropy, the increase in order reflects its decrease. But this creates a problem; if entropy follows the time arrow, its decrease creates a contradiction, since a local inversion of the time arrow is not experienced. In

the universe we live, time always goes from past to future. Because of this, it sounds more logical to assume that entropy always increases under any circumstances, locally or globally; what varies is its acceleration. Order is simply a temporary correlated fact of the way neighbouring systems with different equilibrium boundaries (and, additionally, different accelerations of entropy) interact.



TIME AND ENTROPY

Lagrangian forms and topology

In a previous work [26], it was taken present approach associated with the engineering of thermodynamic systems from the perspective of entropy control, however, without the analytical discussion carried out now. Back then, a direct analysis of a non-zero Lagrangian functional was sufficient. Since time is understood here as an evolutionary variable in a certain abstract configuration space, it seemed reasonable to us to adopt an analytical procedure in which time is the physical basis of the generalized coordinates of that configuration space (in a sense, we could speak of a "thermal time", even though this sounds very abstract!).

We defend that in reality entropy never decreases. What happens is that irreversibility creates, in certain circumstances, interesting situations of organization associated with states of equilibrium that constitute attractors. In other words, equilibrium states are just boundaries of irreversible sequences [17]. Thus, we can think that there are irreversible processes occurring in neighbouring regions whose respective time intervals establish different equilibrium boundary states. It is the interaction between these states that gives rise to those situations where a certain degree of order appears despite the inexorable advance of entropy.

While the entropy of a dynamic system always tends to increase in time, it is acceptable to assume that technical control actions only slow the progress of the entropy. Thus, it is appropriate to speak of the variation of entropy, even if we initially think in terms of the fiction of an isolated system. Looking at some thermal engine as in reference [26], the total variation in the generation of entropy can be written as

$$\delta S_{tot} = \delta S_{int} + \delta S_{ext}. \quad (1)$$

However, if what matters is the rate of change of the entropy, and if the entropy has the same direction as the time arrow, then it is useful to establish a Lagrange functional as

$$\mathcal{L} = \delta Q_{int} \dot{f}(H) + f(H) \frac{\delta Q_{ext}}{\tau_{ref}}, \quad (2)$$

where τ_{ref} is the characteristic transition time interval of the system, called "reference time", and $f(H)$ is a



generalized coordinate given by the Heaviside function of the time interval

$$f(H) = (\tau - \tau_0)H(\tau - \tau_0), \dot{f}(H) = H(\tau - \tau_0),$$

which can be translated into Macaulay *kets* as

$$(\tau - \tau_0)H(\tau - \tau_0) = \langle \tau - \tau_0 \rangle^1,$$

with

$$H(\tau - \tau_0) = \frac{d}{d\tau} \langle \tau - \tau_0 \rangle^1 = \langle \tau - \tau_0 \rangle^0.$$

The Macaulay functions¹, associated with the Heaviside step function, are used here to start a polynomial thermal loading at some time interval in the entropic evolution of the system. It is important to stress that such analytical technique, first introduced by the German mathematician Alfred Clebsch (1833-1872), did not receive much attention until the works developed by the English physicist and electrical engineer Oliver Heaviside (1850-1925), and further applications due to the 1933 Nobel Laureate physicist Paul Dirac (1902-1984). Even so, there are currently few works that apply it.

Lagrangian form assumes

$$\mathcal{L}_1 = \delta Q_{int} \langle \tau - \tau_0 \rangle^0 + \langle \tau - \tau_0 \rangle^1 \frac{\delta Q_{ext}}{\tau_{ref}}. \quad (3)$$

One of the advantages of Lagrangian formalism is that generalized coordinates can be conveniently chosen to exhibit the symmetries of the system or restrictive topological features. In present approach, the use of *kets* symbolizes the discontinuities of state between a time interval and the following interval. This Lagrangian was called "ergodic", which means that it refers to thermal energy evolving over short intervals. The second term refers to the effects of the external supply of thermal energy in a given time interval over a reference period. For $\tau = \tau_0$, the Lagrangian is not defined according to *kets* rules. In other words, because of this singularity, there is no thermal energy passing through the past, which means that entropy always points to the future. Now, let us take the Euler-Lagrange differential equation for a non-dissipative situation,

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \dot{f}(H)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial f(H)} = 0. \quad (4)$$

This implies that

$$\frac{d}{d\tau} (\delta Q_{int}) - \frac{\delta Q_{ext}}{\tau_{ref}} = 0 \therefore \quad (5)$$

$$\boxed{\delta \dot{Q}_{int} = \frac{\delta Q_{ext}}{\tau_{ref}}}. \quad (6)$$

In addition, we can interpret \dot{Q}_{int} as the heat transfer interaction for the interior side of a border at temperature T ², so that the entropy loaded in the variation of the phase path of the interaction is given by

$$\frac{\delta \dot{Q}_{int}}{T} = \frac{\delta Q_{ext}}{T \tau_{ref}}. \quad (7)$$

¹William Macaulay introduced in 1919 the use of discontinuity functions modelling the deflection of beams.

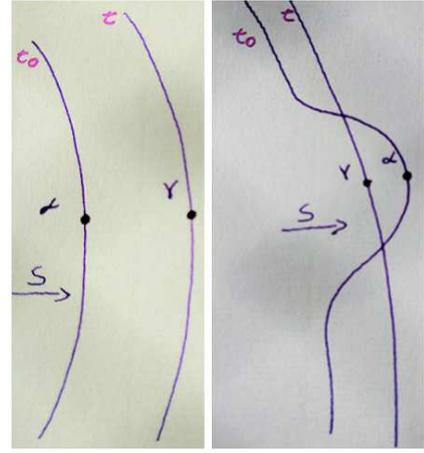


Figure 1: Fictional reversal of causality in our Universe (topologies 1 and 2).

An equivalent ergodic Lagrangian form would be obtained from the Dirac delta function by

$$f(H) = H(\tau - \tau_0) = \int \delta(\tau - \tau_0) d\tau;$$

$$\dot{f}(H) = \delta(\tau - \tau_0) = \langle \tau - \tau_0 \rangle^{-1};$$

$$\mathcal{L}_2 = \delta Q_{int} \delta(\tau - \tau_0) + H(\tau - \tau_0) \frac{\delta Q_{ext}}{\tau_{ref}} \therefore$$

$$\mathcal{L}_2 = \delta Q_{int} \langle \tau - \tau_0 \rangle^{-1} + \langle \tau - \tau_0 \rangle^0 \frac{\delta Q_{ext}}{\tau_{ref}}. \quad (8)$$

From here we can think about extending the analysis by applying the Hamiltonian formalism. Let us derive the Hamiltonian functional for Lagrangian (3),

$$\mathcal{H}_1 = \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \dot{f}(H)} \dot{f}(H) - \mathcal{L}_1;$$

$$\mathcal{H}_1 = \delta Q_{int} \langle \tau - \tau_0 \rangle^0 - \delta Q_{int} \langle \tau - \tau_0 \rangle^0 - \langle \tau - \tau_0 \rangle^1 \frac{\delta Q_{ext}}{\tau_{ref}};$$

$$\mathcal{H}_1 = - \langle \tau - \tau_0 \rangle^1 \frac{\delta Q_{ext}}{\tau_{ref}}. \quad (9)$$

When doing time differentiation on Lagrangian (3) and Hamiltonian (9), we get

$$\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \tau} = \delta \dot{Q}_{int} \langle \tau - \tau_0 \rangle^0 + \delta Q_{int} \langle \tau - \tau_0 \rangle^{-1} +$$

$$\langle \tau - \tau_0 \rangle^0 \frac{\delta Q_{ext}}{\tau_{ref}} + \langle \tau - \tau_0 \rangle^1 \frac{\delta \dot{Q}_{ext}}{\tau_{ref}};$$

²In his approach to entropic interactions, Bejan [4] underlines that each heat transfer interaction \dot{Q}_i which crosses a border of a temperature system T_i carries with it the entropy interaction \dot{Q}_i/T_i ; \dot{Q}_i and \dot{Q}_i/T_i are considered positive when they enter the system. It constructs an interaction vector \dot{Q}_i with components of energy interaction and entropy interaction, namely $(\dot{Q}_i, \dot{Q}_i/T_i)$.



$$\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \tau} = - \langle \tau - \tau_0 \rangle^0 \frac{\delta Q_{ext}}{\tau_{ref}} - \langle \tau - \tau_0 \rangle^1 \frac{\delta \dot{Q}_{ext}}{\tau_{ref}}.$$

Thus, we can write

$$\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \tau} = \delta Q_{int} \langle \tau - \tau_0 \rangle^{-1} + \delta \dot{Q}_{int} \langle \tau - \tau_0 \rangle^0 - \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \tau},$$

which is, in fact, Lagrangian (8) minus $\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \tau}$, say,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \tau} = \delta Q_{int} \langle \tau - \tau_0 \rangle^{-1} + \langle \tau - \tau_0 \rangle^0 \frac{\delta Q_{ext}}{\tau_{ref}} - \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \tau} \dots$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \tau} = \mathcal{L}_2 - \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \tau}. \quad (10)$$

We can repeat this sequence of calculations indefinitely, in such a way that

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{(m,n)}}{\partial \tau} = \mathcal{L}_{(m-1,n-1)} - \frac{\partial \mathcal{H}_{(m,n)}}{\partial \tau}, \quad (11)$$

where m is the *ket* exponent for the internal flow, and n is the *ket* exponent for the external flow. So, there is a family of Lagrangian functionals, from Lagrangian (3), describing different energy confinements, which are related in pairs through the expression (11). Thus, if we have a Lagrangian (m, n) , we find the corresponding Lagrangian $(m-1, n-1)$. For instance, going through Lagrangian (8), say $\mathcal{L}_{(-1,0)}$, we can calculate $\mathcal{L}_{(-2,-1)}$ as

$$\mathcal{L}_{(-2,-1)} = \frac{\partial \mathcal{L}_{(-1,0)}}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{H}_{(-1,0)}}{\partial \tau} \dots$$

$$\mathcal{L}_{(-2,-1)} = -\delta Q_{int} \langle \tau - \tau_0 \rangle^{-2} + \langle \tau - \tau_0 \rangle^{-1} \frac{\delta Q_{ext}}{\tau_{ref}}. \quad (12)$$

Two things are easy to notice: 1) the subsequent Lagrangians, from the first (3), are always the time derivatives (only with respect to the *kets*) of the respective immediately previous functionals; 2) the equilibrium expression (6) maintains its form for any functional less than a constant, which can even be negative. As interesting as this may be from a mathematical point of view, physically there is a severe constraint: entropy cannot be negative! Therefore, only the first two representations have physical significance. However, we can move in the opposite direction. Instead of deriving from the first functional one after another, we can integrate it successively with respect to the *kets* to obtain, disregarding integration constants, a family of functionals perfectly in accordance with expression (6) less than a constant from the exponents of the *kets*. For instance, let us take the *ket*-double-integral of Lagrangian (3),

$$\iint \langle \mathcal{L}_1 \rangle d\tau^2 = \frac{\delta Q_{int}}{2} \langle \tau - \tau_0 \rangle^2 + \langle \tau - \tau_0 \rangle^3 \frac{\delta Q_{ext}}{6\tau_{ref}}.$$

Applying equation (11), we gain

$$\mathcal{L}_{(1,2)} = \delta Q_{int} \langle \tau - \tau_0 \rangle^1 + \langle \tau - \tau_0 \rangle^2 \frac{\delta Q_{ext}}{2\tau_{ref}}, \quad (13)$$

which is precisely the first *ket*-integral of Lagrangian (3), and leads to

$$\delta \dot{Q}_{int} = \frac{1}{2} \frac{\delta Q_{ext}}{\tau_{ref}}.$$

So, we can generalize equilibrium expression (6) to

$$\delta \dot{Q}_{int} = \beta \frac{\delta Q_{ext}}{\tau_{ref}}, \quad (14)$$

with β as the power constant. For Lagrangian $\mathcal{L}_{(2,3)}$,

$$\mathcal{L}_{(2,3)} = \frac{\delta Q_{int}}{2} \langle \tau - \tau_0 \rangle^2 + \langle \tau - \tau_0 \rangle^3 \frac{\delta Q_{ext}}{6\tau_{ref}},$$

$\beta = 1/3$. Therefore, entropy is now depending on a *ket*-power, so that

$$\frac{\delta Q_{ext}}{T} = \frac{\tau_{ref}}{\beta} \frac{\delta \dot{Q}_{int}}{T}. \quad (15)$$

Clearly, $\beta = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}\}$. Note carefully that the method employed combines intrinsic and extrinsic analytical operations; the first partial derivatives in the Lagrange equation and the integrals are taken with respect to the generalized coordinates (the *kets* and their temporal derivatives). Still, the partial derivatives of the Hamilton and Lagrange functions are taken directly with respect to time, regarding the rules valid for *kets*.

First thoughts about all this

We understand that science is, ultimately, the search for universal constants that enable the perception and description of the relatively stable aspects of the world of external things. This is why it seems interesting to assume β as the equilibrium constant for different situations of time confinement of thermal energy.

In principle, our model serves to reopen the discussion on possible metrics (not quite in the conventional sense of the word "metric") in a thermodynamic manifold, since we can speak of an extensive variable, the "distance" (duration) in a figurative temporal manifold. Furthermore, the multiplier equilibrium constant β appearing in expression (6) is inherited from the power of the time interval in *kets*, in such a way that we could, so to speak, associate entropy with a "metric index" derived from the time confinement of thermal energy established by the Lagrangian functional. As Lavenda said, "A holy grail of thermodynamics has been the search of a metric which would allow one to determine distances on a thermodynamic, or primitive, surface." [14] And he continues: "It still remains that the theory of curvature which relies on a metric which specifies a line element is nonexistent in Gibbs space." [14] Also, Lavenda recalls Tisza's statements about the impossibility of "a metric based on length and/or the orthogonality of the basis vectors" in Gibbs' space [14]. We believe that we have a new starting point here to fill this void, as long as we consider entropy a native quantity of a temporal manifold (see figures 1 and 2), since it does not depend on the spatial trajectory. Reasserting, it is not a "metric" in common sense,



not least because the reference is only temporal. As we said, it is a metric index because it comes from the exponents of the *kets*. For, the different states of confinement of thermal energy, connected by the expression (11) and associated with different accelerations of entropy, boost the emergence of various systemic configurations.

The introduction of the function H as a generalized coordinate aims to establish small time intervals along which the variation of the entropy appears with an evolutionary signature; moreover, the Lagrangian functional is not defined for a continuous deformation $\tau \nrightarrow \tau_0$, since for $\tau = \tau_0$, $\langle \tau - \tau_0 \rangle^{-1} \rightarrow \infty$, and $\langle \tau - \tau_0 \rangle^0 \rightarrow \infty$. Thus, entropy seen as a quantity associated with the energy "failure" of the system, must be linked, by its very definition, to the time arrow, never pointed to an instant before the instant of observation. In its unidirectional temporal link with energy, it is a trace of the evolution of the system. Consequently, the proposed ergodic Lagrangian avoids any idealistic abstractionism which seeks to symmetrize entropy as a classic mechanistic concept.

There is a saying from Weinberg that comes well to this discussion. Regarding the standard model, he states that it "... cannot be deduced only from mathematics. Nor does it directly result from the observation of nature". And further on he continues: "It results from conjectures, and is guided by aesthetic judgment and validated by the success of many of their predictions." [31]. We think this applies to entropy, in whose study we have an example of how the limits of pure mathematics and mathematical representation of the physical phenomenon appears. Going through Figures 1 and 2, mathematically, at $\tau = \tau_0$, a "hole" is formed in the corresponding manifold that does not impose any real consequences for the analysis in the region defined by $\tau < \tau_0$, where $\langle \tau - \tau_0 \rangle^0 = 0$ and $\langle \tau - \tau_0 \rangle^{-1} = 0$; there is no physical constraint associated. On the contrary, physically, for t to be less than t_0 , the necessary continuous deformation of state γ passing through state α (or α passing through γ) makes impossible to overcome the "hole", since when γ and α coincide the quantities involved lose their meaning in one true entropic "explosion". There would be no way to reverse or avoid this event, since γ and α are on the same causal line. Here is an extreme instance of physical irreversibility. In the realm of human industrial action, considering a thermodynamic process $E_0 \rightarrow E_1$ as a manipulation of the control variables to change a system from the state E_0 to the state E_1 , each interval $(t - t_0)^\mu$ comprises an irreversible industrial process between two equilibrium states.

In short, we believe it would be interesting to end here with two statements by Atkins [1]:

In definitiva, è praticamente impossibile che l'energia si concentri in grande quantità e in una piccola regione dell'universo. Comunque si presentino le asimmetrie della natura, queste dunque rappresentano solo i vari aspetti del comportamento naturale dell'energia: disperdersi.[...] Per dispersione si intende la tendenza che l'energia ha a dif-

fondersi e a perdere coerenza; essa stabilisce la direzione di un evento spontaneo ed è quantificata dall'entropia: in pratica l'entropia rappresenta il grado di dispersione dell'energia.

Elementary relativistic considerations

From approaches taken by Tolman long time ago on the application of ordinary thermodynamics to an infinitesimal region [30], it is possible to draw some interesting conclusions including the introduction of time variation in a generalized function. Strictly speaking in terms of the increasing entropy conjoint with the progression of time, in flat spacetime the line element using Galilean coordinates can be written as

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + d\tau. \quad (16)$$

To consider a variation in an infinitesimal volume of spacetime, let us assume the four-dimensional element $\delta x \delta y \delta z \delta \langle \tau - \tau_0 \rangle^{-1}$. Placed in this way, the infinitesimal volume element reflects the impossibility of freely navigating time back and forth, showing the distinct nature of the temporal component associated to entropy by specifying a rigid temporal topology (no matter the metric assumed). **Achtung:** note, however, that this is a purely Galilean particular semantic constraint imposed by the very entropic nature of the universe in which we live; generalized functions can be applied under different circumstances in general relativity to analyze the expansion dynamics of the spacetime geodesic arc element (for light-like or space-like geodesics)[25].

If we take into account the essence of the second law, the increase in entropy for the material content of the $\delta x \delta y \delta z$ volume during $\delta \langle \tau - \tau_0 \rangle^{-1}$ is greater than or equal to the entropy that flows from the outside into the infinitesimal volume, whether it comes from the transfer of heat or matter. According to Tolman, considering our temporal representation, this allows us to write the inequality

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \wp}{\partial \tau} \right) \delta x \delta y \delta z \delta \langle \tau - \tau_0 \rangle^{-1} \geq \\ & - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\wp u) + \frac{\partial}{\partial y} (\wp v) + \frac{\partial}{\partial z} (\wp w) \right\} \delta x \delta y \delta z \delta \langle \tau - \tau_0 \rangle^{-1} \\ & + \frac{\delta Q}{T}, \end{aligned} \quad (17)$$

where \wp is the density of entropy, u , v and w are the entropy macroscopic flow velocities at the region considered, and $\delta Q/T$ is the entropy entering the volume coming from outside during time $\delta \langle \tau - \tau_0 \rangle^{-1}$, with T being the temperature at the border of the volume (note that the singular function in time appears only as a variational quantity, reflecting the hypothesis that time represented as evolutionary magnitude must remain under



orientation constraint). Also, Tolman emphasized that since entropy is invariant under Lorentz transformation, entropy density is affected by the Lorentz-Fitzgerald contraction, so that

$$\wp = \wp_0 \frac{dt}{ds},$$

allowing us, after some manipulations and substitutions, to rewrite equation (17) as

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\wp_0 \frac{dx}{ds} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\wp_0 \frac{dy}{ds} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\wp_0 \frac{dz}{ds} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\wp_0 \frac{d\tau}{ds} \right) \right\} \delta x \delta y \delta z \delta \langle \tau - \tau_0 \rangle^{-1} \geq \frac{\delta Q_{ext}}{T}, \quad (18)$$

which is consistent with expression (7), since

$$S_F - S_I \geq \int_I^F \frac{\delta Q}{T} \text{ ("greater than" for irreversible processes)}.$$

The left-hand side of equation (18) refers to the entropy content of the volume element $\delta x \delta y \delta z$ at time interval $\delta \langle \tau - \tau_0 \rangle^{-1}$.

This slightly modified model sheds new light because 1) it supposes an infinitesimal element of volume that retains a certain amount of entropy in interaction with the outside and 2) it assumes a definite variation over a time interval expressly restricted by the causal order. But, what about $\delta \langle \tau - \tau_0 \rangle^{-1}$? As we saw earlier, according to Figures 1 and 2, to deform continuously lines τ and τ_0 there will be a point in which $\tau = \tau_0$, and then, by *kets* rules, $\langle \tau - \tau_0 \rangle^{-1} \rightarrow \infty$, as well as $\langle \tau - \tau_0 \rangle^0 \rightarrow \infty$. Both the Lagrangian functional and the relativistic expression would no longer be defined. The energy required for such a topological distortion, if possible, would be unimaginable corresponding to a heat dissipated to such a degree that the increase in entropy would reach catastrophic levels.

The meaning of the expression $\delta Q = TdS$

The industrialist view of thermodynamics, represented by the numerous illustrations of thermal machines and graphics of the Carnot cycle, restricted classical school teaching to the mechanistic view of the 19th century, emphasizing a pseudo-reversibility that survives only in the superficiality of an anachronistic approach to the subject. This view tends to obscure the general meaning of the expression $\delta Q = TdS$, associating it with the entropic process itself, and not with the process boundaries.

To illustrate how far we can go from the expression $\delta Q = TdS$, which is nothing more than an equilibrium relation, let us consider a more complex example starting from studies of Jacobson [12] [13]. In general relativity, we can take heat as energy flow through an area of some

causal Rindler horizon, setting a proportionality between entropy and that horizon area, and presuming the thermodynamic equilibrium relation $\delta Q = TdS$. To satisfy this relation, having in mind the energy flux across the area of the local Rindler horizon, Jacobson states that "...the gravitational lensing by matter energy must distort the causal structure of spacetime in a way that the Einstein equation holds." [12]. For a Rindler horizon, say \mathcal{R} , we consider an accelerated observer and identify T as the Unruh temperature, with the heat flow equal to the energy flux to be measured by the observer. From the horizon generator k^a and its affine parameter λ , we may define the expression

$$d\mathcal{X}^a = k^a d\lambda dA, \quad (19)$$

where dA is the area element. As the entropy is assumed to be proportional to the area, we have

$$\delta S = \eta \delta A,$$

δA being the area variation of a \mathcal{R} -generators bundle cross section given by

$$\delta A = \int_{\mathcal{R}} \theta d\lambda dA,$$

with θ as the expansion of the horizon generators. So, to assume that $\delta Q = TdS \propto \delta A$ is to say that the energy flux is associated with a converging of the horizon generators on the area element. The rate of converging of the generators is given by Raychaudhuri's equation, which under the stationary conditions imposed is simplified to

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -R_{ab} k^a k^b. \quad (20)$$

Integrating this equation for a small interval of λ ,

$$\theta = -\lambda R_{ab} k^a k^b \therefore \quad (21)$$

$$\delta A = - \int_{\mathcal{R}} \lambda R_{ab} k^a k^b d\lambda dA. \quad (22)$$

Now, we set the heat flow through the stress-energy tensor \mathcal{T}_{ab} , so that, with the aid of equation (19),

$$\delta Q = -\kappa \int_{\mathcal{R}} \lambda \mathcal{T}_{ab} k^a d\mathcal{X}^b = -\kappa \int_{\mathcal{R}} \lambda \mathcal{T}_{ab} k^a k^b d\lambda dA.$$

Thus, to satisfy the equilibrium relation $\delta Q = TdS = T\eta\delta A$, that is,

$$-\kappa \int_{\mathcal{R}} \lambda \mathcal{T}_{ab} k^a k^b d\lambda dA = -T\eta \int_{\mathcal{R}} \lambda R_{ab} k^a k^b d\lambda dA, \quad (23)$$

we need to have

$$\mathcal{T}_{ab} k^a k^b = T R_{ab} k^a k^b. \quad (24)$$

This is how we impose the local equilibrium condition $\delta Q = TdS$ in such a context; as in general the horizon will be expanding, contracting or shearing, we need to match these quantities to zero at the vicinity of the horizon. So, we are describing thermal interactions between



regions by means of energy flows, with the equilibrium state of the system being a boundary interleaving two irreversible processes. From equation (24), Raychaudhuri's equation can be rewritten in a thermodynamic form,

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -T^{-1}\mathcal{T}_{ab}k^ak^b,$$

since $T^{-1}\mathcal{T}_{ab} = R_{ab}$.

Reverse time: in short, fiction and mess

We live in a reality that, like it or not, evolves from less probable states to more probable ones. Our existence works this way; we struggle to stay healthy as long as we can, knowing that in the end we will cease to exist, at least in the way we understand a highly organized biological system. Thence, only in a fictional manner could we conceive a reversal of such reality.

Our technological culture certainly offers us the means to simulate reversals through engineering, simulations that are illusions of ascending order dragged through time. Figures 1 and 2 illustrate the reasoning; Figure 1 represents topologies 1 and 2; Figure 2, topologies 3 and 4. Let two events α and γ in causal chain be positioned respectively in time bands τ_0 and τ which define the edges in which the phenomena advance together. In our Universe we have to assume as an unavoidable premise the orientation "time arrow-cum-entropy", from past to future as so clearly explained Hawking[9]. Living here under this strong constraint, to technically "reverse" entropy we would have to, locally, deform the time band τ_0 in order to make the event γ prior to α (Figure 1). Other equivalent possibilities would be to retard γ making it prior to α , or even to combine the two deformations (Figure 2). As we have already stated, however redundant it appears, assuming that this was feasible, the energy cost of such a topological prowess would be unimaginable, not to say unattainable! The heat dissipated would be of such magnitude that the increase in entropy would reach truly catastrophic levels, with unpredictable consequences for reality.

: FIELD THEORY

The acceleration of entropy

"While entropy tells us the direction of time, it does not tell us the speed. The fact is, the entropy process is constantly changing speed. With every occurrence in the world, entropy increases-but sometimes slower, sometimes faster."

Jeremy Rifkin

There are two ways of dealing with entropy: either convergence with time is given up, assuming it can be negative, or it becomes the very manifestation of time. The difficulty seems to stem from a certain inability of the understanding to combine statistics and

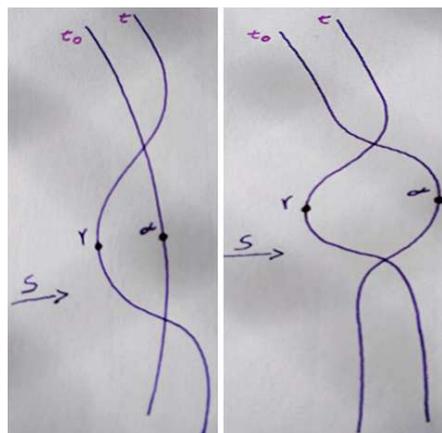


Figure 2: Fictional reversal of causality in our Universe (topologies 3 and 4).

recurrence/irreversibility. Whitehead revealed, to some extent, this difficulty:

"La vraie question est que cette récurrence exacte d'un état de la nature semble seulement invraisemblable, tandis que la récurrence d'un instant du temps viole entièrement notre concept d'ordre du temps. Les instants du temps qui ont passé, sont passés, ne peuvent plus jamais être." [32]

The argument of the high improbability of a given phenomenon from which the logical impossibility of occurrence in a causal natural chain is perceived is more like a metaphysical recourse introduced *ad hoc*. Much of the introductory probabilistic analysis in thermodynamics invariably starts under the influence of Poincaré's ideas about recurrence and with the abstraction of isolated system, something that in practice does not exist. However, for some initial questioning, the image is acceptable as a provisional conjecture. Reichenbach made an enlightening discussion about irreversibility from Boltzmann's theory [21]. We will try to summarize the central idea to treat Gibbs's objection, which permeates the entire discussion.

Imagine an isolated system constituted by a gas in which to the velocities of the constituent particles we randomly assigned positive and negative signals. Let the state B of this gas be characterized by the absence of mixing (positive velocities are separated from negative ones). To be as realistic as possible, there must be a mixing state A preceding and originating B . Also, let's assume a merged state after B , say, C . According to Boltzmann's theory, in terms of relative probability, $B \rightarrow C$ (C provided that B) is much more likely than $A \rightarrow B$ (B provided that A). However, according to Boltzmann himself, the probability of a given state does not depend on the assigned signal. To avoid any contradiction and Gibbs's objection, we must say that, in terms of absolute probability, $B \rightarrow C$ is as frequent as $A \rightarrow B$ (or $C \rightarrow B$), a fact that does not contradict Boltzmann's premise. It so happens that, in this way, the perspective of relevance of the temporal direction is completely lost, since go-



ing from B to C is as likely as from C to B . This is the end; the utility of the isolated system model finishes here. That is the reason why we must abandon the abstraction of closed systems; rather, when we assume that state B has an external origin, it becomes no longer conditioned to the highly improbable path $A \rightarrow B$, and time direction returns to the scene with B certainly preceding C . The most idealistic may object that, at the macroscopic extreme, the universe could be a closed system, but such an assumption is absolutely speculative; there is no indication that would lead us to assume an isolated universe. Tush, it is the perception of the succession of facts that allows us to assimilate time! And, as we have seen, it is the fact that the system is open that allows us to identify the order of that succession!

Perhaps time is so poorly understood because it has remained for centuries a mere counter in mechanical expressions, arbitrated by the hands of beautiful gold and silver watches. Its association with entropy, however, gives it a clear transforming role in nature. Entropy is the ensign of time irreversibility. Although there are different ways of treating time, either in cosmology or quantum physics³, whenever evolution is discussed, entropy is present.

In short, natural phenomena are irreversible, a fact that reflects the arrow of time, being reflected by the latter. Entropy expresses irreversibility as systems evolve from order to disorder. There is no rationality in talking about negentropy, since entropy is a concept linked to irreversibility. Apart from the anthropic nature of technical interventions⁴, which simulate inversion of entropy (when, in fact, they locally slow down the advance of entropy at the cost of much energy dissipation), what makes sense to consider is the so-called spontaneous state of "zero-mark entropy", a low entropy state at the starting point (zero-mark) like the Big-Bang. In this context, the emergence of life is also inserted. Certainly, the evolutionary trajectory of a system from a zero-mark state shall be influenced by neighbouring systems according to their different equilibrium boundary states (assigned by constant β) and, perhaps, to the entropy variation rates of these systems (as previously mentioned, the interaction of different acceleration states would contribute to induce the emergence of new complexities). Formal aspects of the representation of the entropy rate will be dealt next subsection with the help of the so-called Caloric Field Theory developed in [26].

³ When it comes to quantum entanglement, however, the subject becomes challenging, as it is known that the space-time relationships between two entangled particles are surprisingly different from the relationships between macroscopic objects. This, however, is a topic for another place.

⁴ For all practical purposes, an isolated system is understood as one that does not receive any anthropic input.

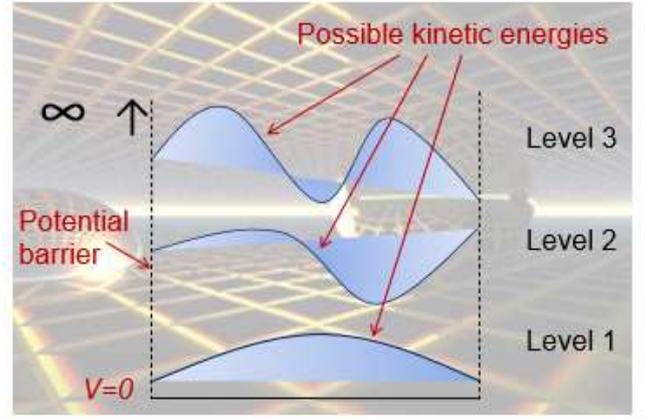


Figure 3: (from Serpa, 2015).

Generalized caloric field theory

According to Caloric Field Theory presented elsewhere, there is a scalar field equation with an entropy term written as

$$\partial_q \partial^q \xi + (1 - \gamma^2) \xi - \gamma^2 \xi \ln |\xi|^2 = 0, \quad (25)$$

with γ constant. Depending on the form of the field, the entropy term can be slightly modified, so that

$$\partial_q \partial^q \xi + (1 - \gamma^2) \xi - 2\gamma^2 \xi \ln |\xi| = 0, \quad (26)$$

being the field entropy in generalized coordinates q given by

$$S = \int -2\gamma^2 |\xi|^2 \ln |\xi| dq. \quad (27)$$

Note that this approach concerns the shape of the caloric field (the function that characterizes thermal energy itself) and the mathematical law of its propagation, including the entropic trail left by the diffusion process. In the previous Lagrangian approach, on the contrary, we established relationships between heat flows through a given region and the entropy productions involved.

As we stated, it is mainly the interaction between regions governed by different extremes of equilibrium (slightly different attractors) that determines the appearance of complexities. It is almost certain (but we are still not absolutely sure) that differences in acceleration of entropy between those regions also play a rule in this outbreak of order.

So, entropy acceleration is defined as

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S}{\partial \tau^2} &= -2\gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \int |\xi|^2 \ln |\xi| dq \\ &= -2\gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \int \xi \xi^\dagger \ln \sqrt{\xi \xi^\dagger} dq. \end{aligned} \quad (28)$$

Now, we first consider the application of derivatives by parts to join both results under one integration:

$$-2\gamma^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \left[(\dot{\xi} \xi^\dagger + \xi \dot{\xi}^\dagger) \ln (\xi \xi^\dagger)^{1/2} + \right.$$



$$+\xi\xi^\dagger \frac{1}{2(\xi\xi^\dagger)^{1/2}} (\xi\xi^\dagger)^{-1/2} (\dot{\xi}\xi^\dagger + \xi\dot{\xi}^\dagger) \Big]; \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & -2\gamma^2 \left[(\ddot{\xi}\xi^\dagger + 2\dot{\xi}\dot{\xi}^\dagger + \xi\ddot{\xi}^\dagger) \ln (\xi\xi^\dagger)^{1/2} + \right. \\ & \left. + (\dot{\xi}\xi^\dagger + \xi\dot{\xi}^\dagger) \frac{1}{2(\xi\xi^\dagger)^{1/2}} \frac{(\dot{\xi}\xi^\dagger + \xi\dot{\xi}^\dagger)}{(\xi\xi^\dagger)^{1/2}} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (\ddot{\xi}\xi^\dagger + 2\dot{\xi}\dot{\xi}^\dagger + \xi\ddot{\xi}^\dagger) \right]. \quad (30) \end{aligned}$$

Let q , the generalized coordinate, take the form $q = f(\tau)$. Thus, the total integration is given by

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S}{\partial \tau^2} &= -2\gamma^2 \int \left\{ \left[(\ddot{\xi}\xi^\dagger + 2\dot{\xi}\dot{\xi}^\dagger + \xi\ddot{\xi}^\dagger) \ln (\xi\xi^\dagger)^{1/2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(\dot{\xi}\xi^\dagger + \xi\dot{\xi}^\dagger)^2}{2\xi\xi^\dagger} + \frac{1}{2} (\ddot{\xi}\xi^\dagger + 2\dot{\xi}\dot{\xi}^\dagger + \xi\ddot{\xi}^\dagger) \right] f(\tau) d\tau + \right. \\ & \left. + \xi\xi^\dagger \ln (\xi\xi^\dagger)^{1/2} \frac{\partial^2 f(\tau)}{\partial \tau^2} d\tau \right\}. \quad (31) \end{aligned}$$

For a particular field of the form $\xi = e^{iaq-\vartheta}$ (a and ϑ are real numbers), the first term of the integration vanishes, so that

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \tau^2} = -2\gamma^2 \int \left[\xi\xi^\dagger \ln (\xi\xi^\dagger)^{1/2} \frac{\partial^2 f(\tau)}{\partial \tau^2} \right] d\tau. \quad (32)$$

With $q = e^{\kappa\tau}$,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \tau^2} = -2\gamma^2 \int -\vartheta e^{-2\vartheta} \kappa^3 e^{\kappa\tau} d\tau;$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \tau^2} = 2\gamma^2 \vartheta e^{-2\vartheta} \int \kappa^3 e^{\kappa\tau} d\tau;$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \tau^2} = 2\gamma^2 \vartheta e^{-2\vartheta} \kappa^2 e^{\kappa\tau}.$$

Combining last equation with equation (14), we gain

$$\frac{\partial^2 S_{\text{int}}}{\partial \tau^2} = \frac{\delta \ddot{Q}_{\text{int}}}{T} = \beta \frac{\delta \dot{Q}_{\text{ext}}}{T\tau_{\text{ref}}} = 2\gamma^2 \vartheta e^{-2\vartheta} \kappa^2 e^{\kappa\tau}. \quad (33)$$

The physical meaning of the quantities γ , ϑ and κ depends on the context in which the formalism is applied. We will see an example in the next section, consolidating the idea of *ur-entropy*.

Energy to retard entropy growth: a pragmatic approach

The *ur-entropy* is the eternal and primordial entropy of the universe. The last part of this article seeks to make a final pragmatic condensation of the philosophical discussion that permeated the whole of this work, so that the reader perceives the extent of the theory explained and how *ur-entropy* is present in our lives.

In terms of survival of the human species, according to Rubbia [23], two alternatives for obtaining energy are presented for large-scale production:

- solar energy;
- new nuclear energy.

The second option presupposes nuclear non-proliferation, with no use of U-235; Thorium fission and D-T fusion would be the very candidates. However, this alternative coming up with two major problems: 1)- high number of irreversible processes with generation of nuclear waste, and 2)- inextricable connection between peaceful and military applications of atomic energy [23]. Conversely, the first option has numerous advantages, starting with the high availability of sunlight in tropical, sub-Saharan and desert regions. In fact, mainly after Fukushima Daiichi man-made catastrophe, it seems that we are moving faster in this last direction, withstanding, as always, the pressures of oil companies and hydroelectric plants. Like it or not, it is a global trend with no turning back. We urgently need solar energy, not only for environmental preservation, but also because we will soon have no option. With the current rates of devastation of natural resources and dryness of the planet, it is not surprising that so many countries are now investing in materials research to improve the performance of photovoltaic cells, as well as in the engineering of panels and components. Not only that; we have ample possibilities ahead for the realization of solar plants for recycling solid waste in large scale [26].

The large cities and the entropic idealistic intellectualism

Large cities are examples of dissipative places where *ur-entropy* accelerates considerably due to anthropogenic activities and interactions with neighborhoods. Prigogine pointed out this fact in his discussion on non-equilibrium structures:

"The simplest example of dissipative structure that we can evoke by analogy is the city. A city is different from the countryside around it; the roots of this individualization are in the relations it maintains with the surrounding countryside: if those were suppressed, the city would disappear.[20]



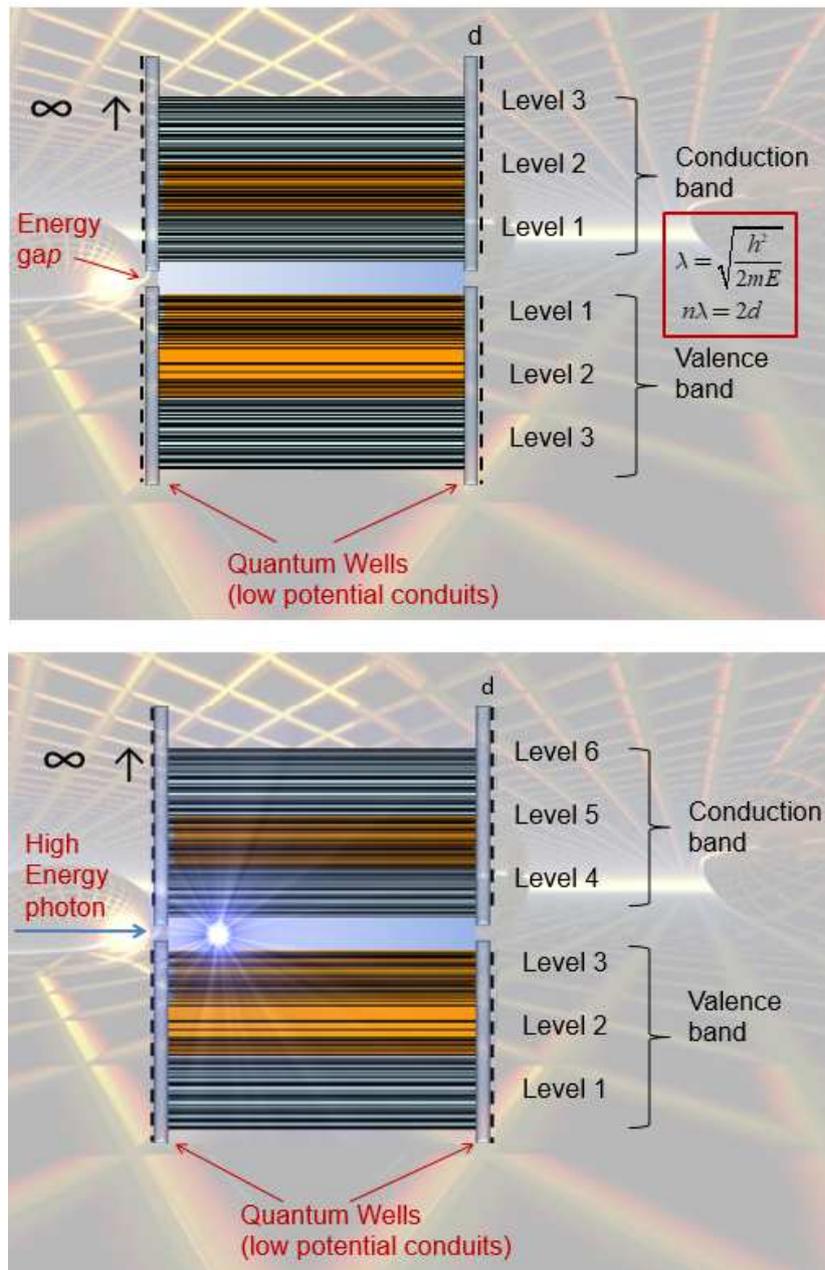


Figure 4: Quantum confinement and quantum tunneling (from Serpa, 2015).

Worse still, as if the very nature of such daily activities were not enough, a true idealistic entropic intellectualism emerges, very common among urban planners. Jacobs was emphatic about this in his seminal criticism of the modernist arrogance in current urban planning [11].

The major problem of planners is that they derive their ideas from futuristic daydreams and not from a keen societal perception through which the real desires and needs of a population would be captured. Very few would be able to conduct a structural anthropological analysis that reflected habits and interpersonal relationships typical of a given urban nucleus, perhaps because they were consumed by the empty culture of postmod-

ernism, or by the excess of technological appeals. The most common projects accelerate urban entropy, creating areas of abandonment with no use and that deteriorate into oblivion. Full of zoning and prohibited spaces, these projects impose disruptive concepts on the gregarious nature of the human species, resulting in isolation, monotony and limited mobility.

Heat islands, loss and solar technology

If, on one hand, cities accumulate islands of heat, on the other hand they are great islands of marked acceleration

of *ur-entropy*. When describing the thermal energy dissipated through asphalt and concrete in heat islands of large cities, which could broadly be converted into useful energy from solar panels and concentrators for countless devices and supply plants, variables and parameters in field equation (26) assume well specific macroscopic roles: γ , the opacity of the medium, refers to the so-called "luminothermic capacity", ϑ is the refractive index of the medium and κ is the average Sky View Factor (SVF) of the city [27].

Measuring the field in urban environments we can evaluate the entropic trail that it leaves to establish the amount of irreversible processes everywhere in the city. As observed in reference [27], the refractive index and the opacity of the medium can vary under anthropogenic influence, interfering with the local entropy rate.

In order to make the most of sunlight freely available in city's environment and its vicinity, solar panels could take advantage of much of the thermal energy lost, especially in building roof structures, parking lots, airport areas and rural areas. Figure 5 shows a schematic plant of a solar thermal system with storage capacity for use in periods of absence of sunlight adapted from Rubbia's work [23].

New perspectives in solar thermal systems

It is not our intention to discuss technical aspects about the manufacture of photovoltaic cells, nor about the types of existing cells; the reader can find excellent details in references [8] and [15]. We are interested in emphasizing the limits imposed by the Second Law in this technological field. As much as we dope silicon, there will always be an efficiency limit and a related dissipation of unusable thermal energy.

The photovoltaic effect is the phenomenon resulting from the incidence of light on the surface of a semiconductor material creating charge-carrying electron-gap pairs, producing electric current; solar cells convert sunlight into electrical current using this effect. The use of solar energy is certainly increasing worldwide, even in countries with little annual availability of sunlight compared to Brazil. However, there is still a considerable technological route to travel, since the current efficiency achieved by the available photovoltaic cells requires large panels for a satisfactory supply of electricity. This technological route includes the search for new materials from existing ones that enable better performance, in addition to the improvement of forms of storage.

About 89% of photovoltaic cells are made with silicon. Silicon is not a good conductor of electricity; doped with phosphorus, it generates a free electron in the last layer (type N); boron doped⁵, it leaves a gap to be filled by an electron (type P). P-N junction generates electric field; photon incidence creates *electronflow* \rightarrow *ddp* + *current*. The theoretical thermodynamic limit for the efficiency of converting light energy into electricity from a single P-N junction cell is about 32.9%. Photons with energies below the band-gap (prohibited band energy)

are not absorbed, whereas photons with energies above the band-gap induce quantum tunnelling (see Figure 4) and have part of this energy dissipated mainly in form of heat.

A new bet in solar thermal systems engineering is the black silicon (b-Si) photovoltaic cell. As reported, this cell exceeds the theoretical limit of 100% in terms of external quantum efficiency by 30%. The external quantum efficiency of a device is 100% when an incoming photon generates an electron for the external circuit. Thus, a quantum efficiency of 130% means that an incoming photon generates approximately 1.3 electrons!

Another very promising technology in progress is that of sensitizing photovoltaic cells by quantum dots. Quantum dots (*QDs*) are semiconductors that are on the nanometer scale; they are nanocrystals that, due to their nanostructure (shape and size), determine potential wells, confining electrons in discrete states of energy (Figure 4). More precisely, a quantum dot contains a small number of conduction band electrons and valence band-gaps (quasi-particles or excitons). These nanocrystalline structures constitute the so-called "quantum dot solar cells" — or quantum dot-sensitized solar cells —, of great interest in the field of solar energy; they reach for now an efficiency of 16.6% with negligible hysteresis, accordingly Hao *et al* in a recent study on the application of mixed caesium and formamidinium lead triiodide perovskite system ($\text{Cs}_{1-x}\text{FA}_x\text{PbI}_3$) in the form of *QDs* [8]. It is important to remember that *QDs* are micro-particles contained in liquid solutions, which allows their application in the form of paints, a very useful feature to manufacture solar panels by printing systems on flexible substrates at low cost.

QDs are also called "artificial atoms", although the scales are quite different (*QDs* = 100nm against *atoms* = 0.1nm); in atoms, the attractive forces are exerted by the nucleus, while in *QDs* they are exerted by the background charges of the nanocrystalline structure. A relevant feature in quantum dot technology is that band-gaps are adjustable across a wide range of energy levels, changing the size of the quantum dot, in contrast to conventional materials where the band-gaps are fixed. Lastly, in addition to this feature, some extra optimizations can be implemented; there are researches on the incorporation of silicon quantum dots (Si-*QDs*) onto b-Si as a hybrid nanostructure, resulting in reflectance reduction over a wide spectral range (300 – 1000nm)[16].

Given this overview, it is easy to see that we deal with two main entropic production lines in a fully functioning photovoltaic *QDs* system (hybrid or not), namely, natural thermal losses — as in any transmission system — in the photon absorption process, and dust that settles on the panels, notably urban dust made up of a mix of particles of different materials. The accumulation of dust decreases the efficiency of the panel, so that the correct maintenance together with the robust-

⁵Doping silicon means to replace Si atoms in the crystal lattice by atoms of other elements.



ness of modern solar kits will guarantee a life cycle of around 25 years, at the end of which the system as a whole definitively degrades. *Ur-entropy* always wins!

FINAL REMARKS

*Deus fecit creaturam. Aut ergo in aeternitate aut extra eam. Non extra eam, quia extra aeternitatem nulla potest esse duratio.*⁶

Henrique de Gand

In view of the knowledge we now have about the Universe, the idea that, if we wait long enough, thousands of simians touching haphazardly computer keyboards will eventually write Homer's Iliad does not go beyond an imaginationist idealistic delirium. Probably, the mechanistic view at the time of Boltzmann, and still dominant today, forced the thermodynamic reasoning towards a solution that foresaw the possibility of restoring order. But today it would not be justified to maintain idealistic constructions if the concept of entropy were widely discussed since basic scientific education. As observed by Deutscher,

"In elementary and even high school education, a great deal of time is spent teaching students the basic notions of force, energy and power, but the word "entropy" is often not even pronounced. It is only those who specialize in the sciences who will become familiar with it. This is a dramatic shortcoming of our education system, as without some understanding of what entropy means it is essentially impossible to comprehend what is going on in the environment and to make the right decisions for its defense." [7]

The problem with humanity is that we are especially talented in developing ways to accelerate entropy under the pretense of progress (one of the worst legacies we have left in recent times was the extinction of the old *Oxiana Palus*, better known as the Aral Sea). Why, it is the very sense of advancing entropy over time that should guide us wisely to mediate between our needs and what is really possible. Every order has an entropic cost. In the case of the civilizing process, this cost is very high. The emergence of humanity has unsettled the environment at a terrible residual rate per entropic activity. Understanding *ur-entropy*, we believe, it will be possible to accept the fact that certain damages that we cause to ourselves and to the world are definitive. It remains to be seen whether there will be room for the flowering of the ideas discussed here, and whether we are willing, as a species, to rationally accept the limits that nature imposes on us.

⁶God gave birth to the creature. But He either did it in eternity or out of it. It was not out of it, because out of eternity there can be no duration.

Acknowledgements

The authors would like to thank Professor José Abdalla Helayél-Neto for his important suggestions and comments.



References

- [1] Atkins, P. (1984). Termodinamica: Il secondo principio. appunti tratti da "Il secondo principio", based on his work *The second law*, W. H. Freeman & Co, 1st edition, New York.
- [2] Bachelard, G. (2015). Ensaio sobre o conhecimento aproximado. Contraponto, Rio de Janeiro.
- [3] Balescu, R. (1975). Equilibrium and nonequilibrium statistical mechanics. John Wiley & Sons, New York.
- [4] Bejan, A. (1996). Entropy generation minimization. CRC Press, Boca Raton.
- [5] Borel, E. (1950). Le jeu, la chance et les théories scientifiques modernes. Gallimard, Paris.
- [6] Broglie, L. de (1976). Recherches d'un demi-siècle. Albin Michel, Paris.
- [7] Deutscher, G. (2008). The Entropy Crisis. World Scientific Publishing, New Jersey.
- [8] Hao, M., *et al* (2020). Ligand-assisted cation-exchange engineering for high-efficiency colloidal Cs1-xFAXPbI3 quantum dot solar cells with reduced phase segregation. *Nature Energy* 5(1) 1-10.
- [9] Hawking, S. (2011). La teoría del todo: El origen y el destino del universo. Debolsillo, Barcelona.
- [10] Huxley, A. (2016). A situação humana. Biblioteca Azul, São Paulo.
- [11] Jacobs, J. (2018). Morte e vida de grandes cidades. Martin Fontes, São Paulo.
- [12] Jacobson, T. (1995). Thermodynamics of spacetime: the Einstein equation of state. *Phys. Rev. Lett.* 75 1260. arXiv: gr-qc/9504004.
- [13] Jacobson, T. (2003). Horizon Entropy. arXiv: gr-qc/0302099v1.
- [14] Lavenda, B. (2010). A new perspective on thermodynamics. Springer, New York.
- [15] Lin, K., *et al* (2018). Perovskite light-emitting diodes with external quantum efficiency exceeding 20 per cent. *Nature* 562 245-248.
- [16] Marzaini, R. (2020). Silicon quantum dot/black silicon hybrid nanostructure for broadband reflection reduction. *Materials Science in Semiconductor Processing*, 115 Art 105113.



- [17] Norton, J. (2016). The impossible process: Thermodynamic reversibility. *History and Philosophy of Modern Physics*, 55 43-61.
- [18] Planck, M. (1960). *Autobiographie scientifique*. Flammarion, Paris.
- [19] Poincaré, M. (2000). *O valor da ciência*. Contraponto, Rio de Janeiro.
- [20] Prigogine, I. (2002). *As leis do caos*. UNESP, São Paulo.
- [21] Reichenbach, H. (1996). *Objetivos y metodos del conocimiento fisico*. Fondo de Cultura Económica, México.
- [22] Rifkin, J. (1989). *Entropy: Into the greenhouse world*. Bantam Books, New York.
- [23] Rubbia, C. (2010). *New energies for the future of mankind*. Pontifical Academy of Science, Vatican City.
- [24] Sagan, C. (1994). *Pálido ponto azul: Uma visão do futuro da humanidade no espaço*. Schwarcz, São Paulo.
- [25] Serpa, N., Steiner, J. (2016). General relativity, quantum gravity and all that: Time machines in perspective by singularity functions. *Bulg. J. Phys.* 43(1) 1-20.
- [26] Serpa, N. (2018). Sur l'entropie contrôlée des systèmes: Transformations de la matière condensée. *CALIBRE - Revista Brasileira de Engenharia e Física Aplicada* 3 1-123.
- [27] Serpa, N. (2020). On cities and entropy: A thermodynamical view of the large towns. *Independent Journal of Management & Production* 11(1) 132-141.
- [28] Sproviero, M. (2001). Entrevista - Entropia: Progresso para a destruição? *Revista de Graduação da Engenharia Química* 8, 9-16.
- [29] Swendsen, R. (2010). How physicists disagree on the meaning of entropy. *Am. J. Phys.* 79(4), 342-348.
- [30] Tolman, R. (1949). *Relativity, thermodynamics and cosmology*. Clarendon Press, Oxford.
- [31] Weinberg, S. (2015). *Para explicar o mundo*. Schwarcz, São Paulo.
- [32] Whitehead, A. (1998). *Le concept de nature*. J. Vrin, Paris.



Appendix

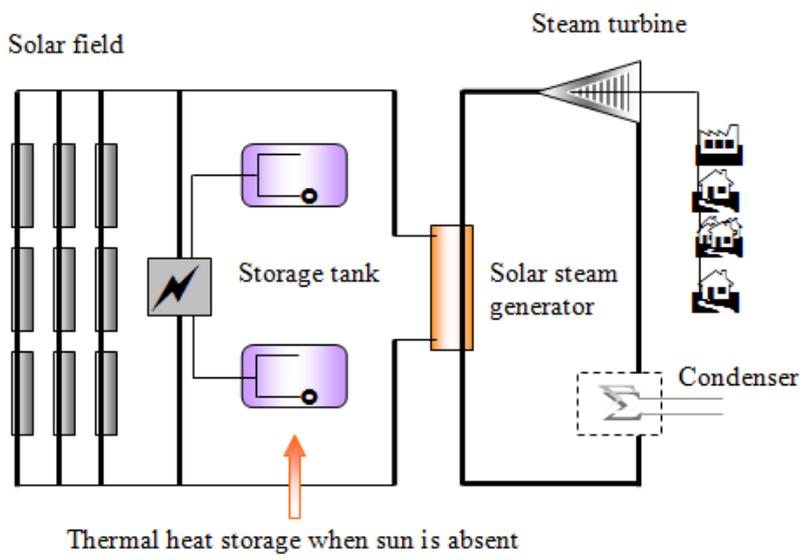


Figure 5: Thermal power plant (adapted from Rubbia, 2010).



Revisão e Implementação de Soluções Analíticas para a Determinação da Pressão em Poços de Petróleo

Igor Caetano Cariello

Engenharia Mecânica, Instituto Politécnico, UERJ, Brasil.

Paulo de Tarço Honório Jr.

Instituto Politécnico, UERJ, Brasil.

Grazione de Souza

Departamento de Modelagem Computacional, Instituto Politécnico, UERJ, Brasil.

Helio Pedro Amaral Souto

Departamento de Modelagem Computacional, Instituto Politécnico, UERJ, Brasil.

Abstract: Well Testing Analysis is a branch of Reservoir Engineering, in which we employ well pressure data from production tests/fluid injection in conjunction with physical-mathematical models to characterize the well-reservoir system, using inverse problems. In these situations, we widely used analytical and semi-analytical solutions of the physical-mathematical model that describes the flow. In this context, the objective of this work is to 1) carry out a bibliographic review on some of the classic analytical solutions for determining the pressure in the producing well and 2) implement the numerical codes for the creation of a computational library, providing the analytical solutions aimed at determining pressure in oil-producing wells. The well-reservoir systems with a vertical well take into account the boundary effects, wellbore storage, formation damage, drawdown and buildup test analysis, and the presence of natural fractures. We obtain the analytical solutions using the Laplace transform and a numerical inversion, using the Stehfest algorithm, to calculate the pressure variation in the time domain.

Key words: Analytical Solutions, Inverse Laplace Transform, Laplace Transform, Stehfest Algorithm, Well Testing Analysis.

Resumo: A Análise de Testes de Poços é um ramo da Engenharia de Reservatórios no qual empregamos dados de pressão de poço a partir de testes de produção/injeção de fluido em conjunto com modelos físico-matemáticos para caracterizar o sistema poço-reservatório, usando problemas inversos. Nessas situações, aplicamos amplamente soluções analíticas e semianalíticas do modelo físico-matemático que descreve o fluxo. Nesse contexto, o objetivo do presente estudo é 1) realizar uma revisão bibliográfica sobre algumas das soluções analíticas clássicas para determinação da pressão no poço produtor e 2) implementar os códigos numéricos para a criação de uma biblioteca computacional, proporcionando as soluções analíticas voltadas para a determinação da pressão em poços produtores de petróleo. Os sistemas poço-reservatório estudados possuem um poço vertical e levam em consideração os efeitos de condições de contorno, a estocagem na coluna de produção do poço, dano à formação, períodos de fluxo e estática, bem como a presença de fraturas naturais. Obtivemos as soluções analíticas usando a transformada de Laplace e uma inversão numérica, utilizando o algoritmo Stehfest, para calcular a variação de pressão ao longo do tempo.

Palavras-chave: Soluções Analíticas, Transformada de Laplace Inversa, Transformada de Laplace, Algoritmo de Stehfest, Análise de Teste de Poço.

Corresponding author: Grazione de Souza, gsouza@iprj.uerj.br

Received: 20 Oct 2020 / Accepted: 18 Nov 2020 / Published: 20 Dec 2020.

1 Introdução

Na Análise de Testes de Pressão, um dos ramos da Engenharia de Reservatórios de Petróleo [1, 6, 14, 23], temos por meta a caracterização do sistema poço-reservatório através da solução de problemas inversos, utilizando dados de testes de pressão em poços. Desta forma, é possível obtermos as propriedades do sistema poço-reservatório, utilizadas posteriormente como uma estimativa acurada das características do sistema, de forma a permitir uma melhor escolha da estratégia de produção. Em um teste com produção à vazão constante, por exemplo, a pressão no poço cairá com o passar do tempo e estes dados são coletados por um registrador de pressão, alocado em algum ponto do poço. Neste contexto, aplicativos computacionais dedicados à essa área também são utilizados pela indústria do petróleo.

Quando da análise dos testes de pressão utilizamos tipicamente os gráficos especializado e diagnóstico. No gráfico especializado temos a representação da pressão no poço (p_{wf}) em função do tempo (t), com esse último eixo em escala logarítmica. Os dados obtidos a partir da medição de campo são discretos e contêm ruídos. Por outro lado, o gráfico diagnóstico, com ambos os eixos em escala logarítmica, apresenta uma curva para a queda de pressão no poço e uma outra para a derivada da pressão em relação ao logaritmo neperiano do tempo, $\Delta p'_{wf}$, a chamada derivada de Bourdet [4]. Neste trabalho, as linhas contínuas representam a variação de pressão e as tracejadas as derivadas de Bourdet, respectivamente, quando da apresentação de um gráfico diagnóstico. Os perfis das curvas neste gráfico estão relacionados com a sequência de regimes de escoamento que ocorrem e, assim, podem ser empregados na caracterização do sistema poço-reservatório.

De posse de resultados de campo e de um modelo adequado para o escoamento é possível utilizarmos as técnicas de resolução de problemas inversos para determinarmos as propriedades associadas à estocagem no poço [20], à capacidade do reservatório em transportar fluido [17] e ao dano à formação [16], por exemplo.

A partir do conhecimento das propriedades de rocha que formam o reservatório e das características dos fluidos é possível realizar a modelagem do escoamento dos fluidos, mediante a resolução das equações diferenciais parciais que governam o escoamento [19]. Nos casos mais próximos da realidade, o escoamento geralmente é descrito por equações diferenciais parciais não-lineares. Portanto, a solução dessas equações, através dos métodos analíticos, está restrita a casos particulares. Entretanto, isso não inviabiliza o seu uso, visto que as soluções analíticas, mesmo obtidas com hipóteses simplificadoras, auxiliam:

1. no entendimento da física do escoamento;
2. no estudo de problemas simplificados;
3. na caracterização do sistema poços-reservatório (problemas inversos);

4. na verificação de simuladores numéricos (testados em problemas particulares);
5. na utilização conjunta, em alguns casos, com os simuladores numéricos.

Na literatura, podemos encontrar soluções analíticas clássicas, consolidadas, para a determinação da pressão no poço em escoamentos em reservatórios, como as revisadas por Chaudhry [6], Dake [9], Ozkan [22] e Rosa et al [26]. No entanto, ao longo do tempo, esforços têm sido realizados para reduzirmos o número de hipóteses simplificadoras e foram desenvolvidas soluções analíticas/semianalíticas que podem ser aplicadas aos casos mais realísticos, tais como as estratégias apresentadas por Chen et al. [11], Du et al. [12], Ozkan [22], Qiu e Li, [25], Wendong et al. [29] e Zeng e Zhao [30].

Diferentes técnicas têm sido empregadas na obtenção das soluções das equações diferenciais que governam o escoamento no reservatório como, por exemplo, a Transformada de Laplace e a Transformada Inversa de Laplace [27]. Em geral, a menos que hipóteses simplificadoras sejam adotadas, devemos utilizar uma técnica numérica para obtermos a transformada inversa.

Devemos destacar que Hassanzadeh e Pooladi-Darvish [15] realizaram um estudo comparativo de algumas das técnicas de inversão numérica e comprovaram a eficiência do Algoritmo de Stehfest (utilizado neste trabalho). Exemplos de aplicações envolvendo a Transformada de Laplace e a sua inversão numérica podem ser encontradas em [2, 3, 5, 8].

Este trabalho tem como objetivos principais a revisão e a implementação de códigos numéricos voltados para a obtenção de um conjunto de soluções analíticas para a determinação da pressão em poços verticais produtores de óleo, visando à criação de uma biblioteca de códigos para a sua conseqüente utilização no Laboratório de Modelagem Multiescala e Transporte de Partículas (www.labtran.iprj.uerj.br) da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

2 Escoamento monofásico em meio poroso

Para o escoamento monofásico em um meio poroso o balanço de massa é dado pela equação da continuidade [13]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho) + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) - q_m = 0, \quad (1)$$

onde ϕ é a porosidade efetiva, ρ é a massa específica, \mathbf{v} é a velocidade aparente do fluido e q_m um termo de fonte/sorvedouro.

Por outro lado, a equação que expressa a conservação da quantidade de movimento é a lei clássica de Darcy [13],

$$\mathbf{v} = -\frac{\mathbf{k}}{\mu}(\nabla p - \gamma\nabla Z), \quad (2)$$

onde \mathbf{k} é o tensor de permeabilidade absoluta do meio poroso, μ é a viscosidade do fluido, p é a pressão, $\gamma = \rho g$ (g é a magnitude da aceleração da gravidade) e ∇Z é o gradiente de profundidade. A lei de Darcy clássica é estritamente válida para um conjunto específico de hipóteses [13].

A partir das equações da continuidade e da lei de Darcy clássica, podemos obter uma equação para a determinação da distribuição de pressão no reservatório,

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{k} \nabla p}{\mu B} \right) = \left(\frac{\phi c}{B^0} + \frac{\phi^0 c_\phi}{B} \right) \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3)$$

tendo sido desprezados o efeito da gravidade e o termo fonte e assumimos que $\phi = \phi(p)$ e $B = B(p)$,

$$B = \frac{B^0}{1 + c(p - p^0)}, \quad (4)$$

$$\phi = \frac{\phi^0}{1 + c_\phi(p - p^0)}, \quad (5)$$

onde nessas equações B é o Fator Volume Formação (FVF), que é a razão entre o volume do fluido na pressão e temperatura do reservatório e o volume ocupado pelo mesmo em condições padrão de temperatura e pressão, c é o coeficiente de compressibilidade isotérmica do fluido, c_ϕ é o coeficiente de compressibilidade da rocha e o sobrescrito 0 indica os valores de referência. Para maiores detalhes sobre propriedades de rochas e fluidos recomenda-se ao leitor o livro de Dandekar [10].

Consideramos, aqui, as soluções para o escoamento unidimensional na direção radial [26, 22], levando em conta que a permeabilidade e a viscosidade são constantes. Inicialmente, mostraremos as equações para o sistema de coordenadas Cartesianas e, posteriormente, usaremos o sistema de coordenadas cilíndricas. Então,

$$\frac{k}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \left(\frac{\phi c}{B^0} + \frac{\phi^0 c_\phi}{B} \right) \frac{\partial p}{\partial t} \quad (6)$$

A partir do lado esquerdo da Eq. (6),

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{1}{B} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{c}{B^0} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2. \quad (7)$$

Considerando-se baixos gradientes de pressão e o baixo valor de c ,

$$c \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 \ll \frac{1}{B} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (8)$$

e, substituindo a Eq. (7) na Eq. (6), a luz da Eq. (8), tem-se,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\mu B}{k} \left(\frac{\phi c}{B^0} + \frac{\phi^0 c_\phi}{B} \right) \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (9)$$

Reorganizando o lado direito da Eq. (9), utilizando-se as equações para FVF e porosidade,

$$\frac{\mu B}{k} \left(\frac{\phi c}{B^0} + \frac{\phi^0 c_\phi}{B} \right) \frac{\partial p}{\partial t} =$$

$$\frac{\mu \phi}{k} \left(\frac{c}{[1 + c(p - p^0)]} + \frac{c_\phi}{[1 + c_\phi(p - p^0)]} \right) \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (10)$$

Considerando $c(p - p^0)$ e $c_\phi(p - p^0)$ como valores baixos e definindo $c_T = (c + c_\phi)$, a compressibilidade total, substitui-se a Eq. (10) na Eq. (9). Assim,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\mu \phi c_T}{k} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (11)$$

onde $c_T = (c + c_\phi)$ representa o coeficiente de compressibilidade total e a sua correspondente forma em coordenadas cilíndricas é dada por:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (12)$$

onde $\eta = k / (\phi \mu c_T)$ é a difusividade hidráulica.

Na resolução da Eq. (12) impomos uma condição inicial dada por $p(r, t_0) = p_i$, onde p_i é a pressão inicial no reservatório.

No que diz respeito às condições de contorno, uma condição de contorno interna para a pressão é prescrita no raio do poço, $r = r_w$.

Nas fronteiras externas, uma condição de contorno do tipo Dirichlet conduz a uma pressão prescrita na fronteira. Tal condição de contorno é utilizada em reservatórios constantemente alimentados por um forte influxo devido à existência de um aquífero, de forma que a pressão na fronteira entre o reservatório e o aquífero permaneça constante.

Em contrapartida, quando prescrevemos o fluxo mássico através da fronteira do reservatório, temos uma condição de contorno do tipo Neumann. A especificação de um fluxo normal à fronteira corresponde à prescrição de um gradiente de pressão na direção normal à fronteira. Em fronteiras seladas (impermeáveis) não há fluxo, de modo que impomos um gradiente de pressão nulo [13].

3 Soluções revisadas para a pressão no poço

Nesta seção, revisamos cinco soluções analíticas conhecidas para a determinação da pressão em poços produtores. Três são obtidas a partir da imposição de diferentes condições de contorno, uma é utilizada quando há mudança na produção ao longo do tempo e a última leva em conta as heterogeneidades do reservatório.

3.1 Caso 1

Primeiro, vamos estudar o caso no qual o reservatório é considerado infinito, homogêneo e com espessura uniforme; o regime é transiente; o escoamento é unidirecional na direção r ; e o poço vertical penetra totalmente a formação rochosa.

A variação de pressão é definida como

$$\Delta p(r, t) = p_i - p(r, t), \quad (13)$$



de forma que é possível reescrever a Eq. (12) como

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Delta p}{\partial r} \right) = \frac{1}{\eta} \frac{\partial \Delta p}{\partial t}. \quad (14)$$

e, então, a condição inicial é dada por

$$\Delta p(r, t = 0) = 0. \quad (15)$$

enquanto que para a condição de contorno externa temos que

$$\Delta p(r \rightarrow \infty, t) = 0. \quad (16)$$

Para uma taxa de produção constante, Q_{sc} , em condições padrão do poço, impomos a seguinte condição de contorno interna

$$\left(r \frac{\partial \Delta p}{\partial r} \right)_{r=r_w} = -\frac{Q_{sc} B \mu}{2\pi k h}. \quad (17)$$

Em seguida, tomamos a Transformada de Laplace [22] de modo a obtermos para condição de contorno externa

$$\overline{\Delta p}(r \rightarrow \infty, s) = 0, \quad (18)$$

para a condição de contorno interna

$$\left(r \frac{d\overline{\Delta p}}{dr} \right)_{r=r_w} = -\frac{Q_{sc} B \mu}{2\pi k h s} \quad (19)$$

e, para a equação diferencial parcial governante [22],

$$\frac{1}{r} \frac{d\overline{\Delta p}}{dr} + \frac{d^2 \overline{\Delta p}}{dr^2} - \frac{s}{\eta} \overline{\Delta p} = 0. \quad (20)$$

Como a Eq. (20) pode ser escrita na forma da equação modificada de Bessel, a sua solução geral é dada por [22]

$$\overline{\Delta p}(s) = C_1 I_0 \left(r \sqrt{s/\eta} \right) + C_2 K_0 \left(r \sqrt{s/\eta} \right), \quad (21)$$

onde I_0 e K_0 são as funções modificadas de Bessel [22].

Da condição de contorno externa e sabendo que $\lim_{r \rightarrow 0} I_0(r) = \infty$ [22], chegamos a conclusão de que $C_1 = 0$ para que a condição de contorno seja satisfeita. Então,

$$\overline{\Delta p}(s) = C_2 K_0 \left(r \sqrt{s/\eta} \right). \quad (22)$$

Para encontrarmos o valor de C_2 utilizamos a condição de contorno interna,

$$\begin{aligned} \left(r \frac{d\overline{\Delta p}}{dr} \right)_{r=r_w} &= -C_2 r_w \sqrt{s/\eta} K_1 \left(r_w \sqrt{s/\eta} \right) \\ &= -\frac{Q_{sc} B \mu}{2\pi k h s}, \end{aligned} \quad (23)$$

ou seja,

$$C_2 = \frac{Q_{sc} B \mu}{2\pi k h} \frac{1}{s r_w \sqrt{s/\eta} K_1 \left(r_w \sqrt{s/\eta} \right)} \quad (24)$$

e a forma final da solução é dada por

$$\overline{\Delta p}(s) = \frac{Q_{sc} B \mu}{2\pi k h} \frac{K_0 \left(r \sqrt{s/\eta} \right)}{s r_w \sqrt{s/\eta} K_1 \left(r_w \sqrt{s/\eta} \right)}. \quad (25)$$

A solução no domínio do tempo pode ser obtida de duas formas: através de uma aproximação ainda no domínio de Laplace, que leve a uma forma passível de inversão via uma Tabela de Transformada Inversa de Laplace (solução da linha fonte) [22], ou por uma inversão numérica [15, 27], como neste trabalho.

3.2 Caso 2

Tratamos, agora, do caso do escoamento em um reservatório cilíndrico e selado, com uma pressão inicial uniforme, em regime transiente, com um poço vertical penetrando totalmente na formação e com uma taxa de produção constante. Como o reservatório é selado,

$$\left(\frac{d\overline{\Delta p}}{dr} \right)_{r=r_e} = 0. \quad (26)$$

e, portanto, da Eq. (21) obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\overline{\Delta p}}{dr} \right)_{r=r_e} &= C_1 \sqrt{s/\eta} I_1 \left(r_e \sqrt{s/\eta} \right) \\ &\quad - C_2 \sqrt{s/\eta} K_1 \left(r_e \sqrt{s/\eta} \right) = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

onde I_1 também é uma função de Bessel modificada. Reescrevendo o resultado em função de C_2 ,

$$C_2 = C_1 \frac{I_1 \left(r_e \sqrt{s/\eta} \right)}{K_1 \left(r_e \sqrt{s/\eta} \right)}, \quad (28)$$

e substituindo-o na Eq. (21),

$$\begin{aligned} \overline{\Delta p}(s) &= C_1 I_0 \left(r \sqrt{s/\eta} \right) \\ &\quad + C_1 \frac{K_0 \left(r \sqrt{s/\eta} \right) I_1 \left(r_e \sqrt{s/\eta} \right)}{K_1 \left(r_e \sqrt{s/\eta} \right)} \end{aligned} \quad (29)$$

Agora, da condição de contorno interna, Eq. (17),

$$C_1 = \frac{A_1 K_1 \left(r_e \sqrt{s/\eta} \right)}{A_2 - A_3} \quad (30)$$

onde

$$A_1 = \frac{Q_{sc} B \mu}{2\pi k h} \frac{1}{s \sqrt{s/\eta} r_w}, \quad (31)$$

$$A_2 = I_1 \left(\sqrt{s/\eta} r_e \right) K_1 \left(\sqrt{s/\eta} r_w \right), \quad (32)$$

$$A_3 = I_1 \left(\sqrt{s/\eta} r_w \right) K_1 \left(\sqrt{s/\eta} r_e \right) \quad (33)$$

Então, após substituição da expressão de C_1 na Eq. (28),

$$C_2 = \frac{A_1 I_1 \left(r_e \sqrt{s/\eta} \right)}{A_2 - A_3} \quad (34)$$

Finalmente, das Eqs. (30), (34) e (21) obtemos a solução procurada

$$\overline{\Delta p}(s) = A_1 \left(\frac{A_4 + A_5}{A_2 - A_3} \right), \quad (35)$$

onde

$$A_4 = I_0 \left(r \sqrt{s/\eta} \right) K_1 \left(r_e \sqrt{s/\eta} \right), \quad (36)$$

$$A_5 = I_1 \left(r_e \sqrt{s/\eta} \right) K_0 \left(r \sqrt{s/\eta} \right). \quad (37)$$

3.3 Caso 3

À exceção da estocagem no poço e do dano à formação, as mesmas características do Caso 1 são compartilhadas com o Caso 3.

Na estocagem, o fluido presente inicialmente na coluna de produção é aquele que é primeiramente produzido. O coeficiente de estocagem, C , é dado por $\pi r_w^2 L_{wf} c$, onde L_{wf} é o comprimento do poço contendo o fluido no instante inicial.

Na prática, também, costuma ocorrer o dano à formação, que leva ao surgimento de uma camada, ao redor do poço, com um valor de permeabilidade reduzido. Como consequência, existe uma dificuldade adicional à passagem de fluido. Segundo Rosa et al [26], o seu efeito é percebido através de uma variação de pressão acentuada perto do poço. O fator de skin, S , é um número adimensional usado na modelagem do dano à formação e ele é dado por [26]

$$S = \left(\frac{k}{k_s} - 1 \right) \ln \left(\frac{r_w}{r_s} \right) \quad (38)$$

onde k_s é a permeabilidade na região delimitada pelo raio r_s .

Definindo o dano a partir da condição de contorno interna, para uma vazão na face da formação igual a Q_{sf} ,

$$S = \frac{p(r_w^+) - p_{wf}}{\left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=r_w}} = \frac{p(r_w^+) - p_{wf}}{\frac{Q_{sf} B \mu}{2\pi k h}}, \quad (39)$$

onde $p(r_w^+)$ é a pressão imediatamente após a zona de dano e p_{wf} é a pressão no interior do poço. Portanto,

$$\Delta p_{wf} = \Delta p(r_w^+) - S \left(r \frac{\partial \Delta p}{\partial r} \right)_{r=r_w}. \quad (40)$$

Quando utilizamos a vazão de superfície, devemos considerar que o reservatório pode estar acumulando ou perdendo fluido e, por isso,

$$Q_{sc} = Q_{wb} + Q_{sf}, \quad (41)$$

onde

$$Q_{wb} = \frac{C}{B} \frac{d}{dt} \Delta p_{wf}, \quad (42)$$

enquanto que Q_{sf} é a taxa de produção na superfície de contato com a rocha,

$$Q_{sf} = - \frac{2\pi k h}{B \mu} \left(r \frac{\partial \Delta p}{\partial r} \right)_{r=r_w}. \quad (43)$$

Assim, das Eqs. (41), (42) e (43),

$$\frac{C}{B} \frac{d}{dt} \Delta p_{wf} - \frac{2\pi k h}{B \mu} \left(r \frac{\partial \Delta p}{\partial r} \right)_{r=r_w} = Q_{sc}. \quad (44)$$

Aplicando, em seguida, a transformada de Laplace às Eqs. (40) e (44), respectivamente,

$$\overline{\Delta p}_{wf} = \overline{\Delta p}(r_w^+) - S \left(r \frac{d\overline{\Delta p}}{dr} \right)_{r=r_w} \quad (45)$$

e

$$\frac{C}{B} s \overline{\Delta p}_{wf} - \frac{2\pi k h}{B \mu} \left(r \frac{d\overline{\Delta p}}{dr} \right)_{r=r_w} = \frac{Q_{sc}}{s}. \quad (46)$$

Analogamente ao que foi feito no Caso 1, sabemos que a solução geral do escoamento assume a forma da Eq. (22). Por conseguinte, a sua utilização permite que escrevamos a Eq. (45) na forma

$$\overline{\Delta p}_{wf} = C_2 K_0 \left(r_w^+ \sqrt{s/\eta} \right) + C_2 S r_w \sqrt{s/\eta} K_1 \left(r_w \sqrt{s/\eta} \right). \quad (47)$$

e, da sua substituição na Eq. (46),

$$C_2 \frac{C}{B} s \left[K_0 \left(r_w^+ \sqrt{s/\eta} \right) + S r_w \sqrt{s/\eta} K_1 \left(r_w \sqrt{s/\eta} \right) \right] + C_2 \left(\frac{2\pi k h}{B \mu} \right) r_w \sqrt{s/\eta} K_1 \left(r_w \sqrt{s/\eta} \right) = \frac{Q_{sc}}{s}. \quad (48)$$

Então, a partir dessa equação é possível encontrarmos o valor de C_2 ,

$$C_2 = \frac{A_6}{A_7 + A_8} \quad (49)$$

onde

$$A_6 = \frac{Q_{sc} B \mu}{2\pi k h s} \quad (50)$$

$$A_7 = r_w \sqrt{s/\eta} K_1 \left(r_w \sqrt{s/\eta} \right) \quad (51)$$

$$A_8 = \frac{C \mu s}{2\pi k h} \left[K_0 \left(r_w^+ \sqrt{s/\eta} \right) + S r_w \sqrt{s/\eta} K_1 \left(r_w \sqrt{s/\eta} \right) \right] \quad (52)$$

Por fim, substituindo a Eq. (49) na Eq. (47),

$$\overline{\Delta p}_{wf} = \frac{A_6 K_0 \left(r_w^+ \sqrt{s/\eta} \right)}{A_7 + A_8} + \frac{A_6 S r_w \sqrt{s/\eta} K_1 \left(r_w \sqrt{s/\eta} \right)}{A_7 + A_8}. \quad (53)$$



3.4 Caso 4

Neste caso, o reservatório e o escoamento possuem as mesmas características que as do Caso 3. Contudo, agora, um outro teste de pressão é idealizado, no qual o poço fica fechado por um período de tempo, com o intuito de estabelecermos um estágio de equalização de pressão. Assim sendo, um novo tempo é introduzido no problema, t_p , que corresponde ao tempo no qual o poço ficou aberto. Logo, para o Caso 4, admitimos um teste de pressão envolvendo períodos de produção e fechamento do poço [22].

Modificando a Eq. (44) para que ela possa ser aplicada ao problema em questão

$$\frac{C}{B} \frac{d}{dt} \Delta p_{wf} - \frac{2\pi kh}{B\mu} \left(r \frac{\partial \Delta p}{\partial r} \right)_{r=r_w} = Q_{sc} [1 - H(t - t_p)] \quad (54)$$

onde H representa a função unitária de Heaviside. Tomando a sua transformada de Laplace obtemos [22],

$$\frac{C}{B} s \overline{\Delta p_{wf}} - \frac{2\pi kh}{B\mu} \left(r \frac{\partial \overline{\Delta p}}{\partial r} \right)_{r=r_w} = \frac{Q_{sc}}{s} (1 - e^{-st_p}). \quad (55)$$

Dando prosseguimento, substituímos a Eq. (47) na Eq. (55),

$$C_2 \frac{C}{B} s \left[K_0 \left(r_w^+ \sqrt{s/\eta} \right) + S r_w \sqrt{s/\eta} K_1 \left(r_w \sqrt{s/\eta} \right) \right] + C_2 \left(\frac{2\pi kh}{B\mu} \right) r_w \sqrt{s/\eta} K_1 \left(r_w \sqrt{s/\eta} \right) = \frac{Q_{sc}}{s} (1 - e^{-st_p}). \quad (56)$$

Em seguida, explicitamos C_2 :

$$C_2 = \frac{A_6 (1 - e^{-st_p})}{A_7 + A_9} \quad (57)$$

onde

$$A_9 = \frac{C\mu s}{2\pi kh} \left[K_0 \left(r_w^+ \sqrt{s/\eta} \right) + S A_7 \right] \quad (58)$$

Por último, o valor de C_2 é introduzido na Eq. (47),

$$\overline{\Delta p_{wf}} = \frac{A_6 \left[K_0 \left(\sqrt{s/\eta} r_w \right) + S A_7 \right] (1 - e^{-st_p})}{A_7 + A_9} \quad (59)$$

Devido a uma descontinuidade, causada por $(1 - e^{-st_p})$ quando $t = t_p$, na inversão numérica é recomendada a utilização da técnica sugerida por Chen e Raghavan [7],

$$L^{-1} \left\{ \overline{f}(s) (1 - e^{-st_p}) \right\}_t = L^{-1} \left\{ \overline{f}(s) \right\}_t - L^{-1} \left\{ \overline{f}(s) \right\}_{t-t_p}, \quad (60)$$

realizando, assim, a inversão numérica termo a termo.

3.5 Caso 5

No Caso 5, recuperamos a solução proposta por Warren e Root [28] para os meios porosos naturalmente fraturados.

As fraturas naturais surgem nas rochas devido aos diferentes esforços exercidos sobre elas (causando deformações físicas nas suas estruturas) ou devido à ação de agentes químicos. As fraturas modificam as propriedades do reservatório, fazendo com que a porosidade e a permeabilidade sejam diferentes nas regiões fraturada e não fraturada. Portanto, elas modificam o escoamento dos fluidos na matriz porosa, resultando em um aumento da produção do reservatório uma vez que, em geral, a região fraturada possui valores mais elevados da permeabilidade e da porosidade [26].

Ao se iniciar a produção em um reservatório naturalmente fraturado, o escoamento será caracterizado por quatro regimes. Inicialmente, a produção é proveniente do escoamento através apenas das fraturas. Depois, ocorre um período de transição até que, na sequência, tanto a região fraturada quanto a não fraturada irão contribuir para a produção no reservatório. Por último, podem aparecer os efeitos de fronteira [22].

O Caso 5 contempla a solução do escoamento em um reservatório infinito, naturalmente fraturado, com uma pressão inicial uniforme e uma produção a vazão constante. A solução apresentada está baseada no trabalho desenvolvido por Warren e Root [28] e é aplicada tendo em vista o modelo de camadas de Kazemi [18] (Figura 1).

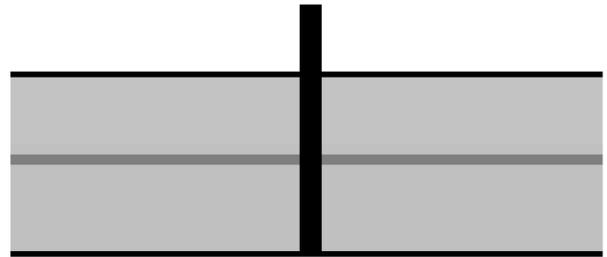


Figura 1: Em preto o poço, em cinza escuro a fratura e em cinza claro a matriz.

O detalhamento para a obtenção da solução é omitido, sabendo que o mesmo pode ser visto em [28]. Portanto, no domínio de Laplace, a variação de pressão é calculada a partir da equação

$$\overline{\Delta p}(s) = \frac{K_0 \left(\sqrt{s f(s)} \right)}{s \sqrt{s f(s)} K_1 \left(\sqrt{s f(s)} \right)}, \quad (61)$$

onde $f(s)$ é definida como

$$f(s) = \frac{\omega (1 - \omega) s + \lambda}{(1 - \omega) s + \lambda}, \quad (62)$$

sendo λ o parâmetro que reflete a relação do fluxo de fluido entre a matriz porosa e a fratura e ω o parâmetro

que mede a relação entre a quantidade de fluido armazenado na fratura e no sistema fratura mais matriz porosa (maiores detalhes sobre a determinação dos valores adimensionais λ e ω podem ser obtidos em [1]).

4 Implementação

Na Figura (2), vemos como variam as funções modificadas de Bessel I_0 , I_1 , K_0 e K_1 . Conforme pudemos ver das soluções aqui revisadas, essas funções combinadas nos permitem calcularmos os perfis de queda de pressão nos poços produtores. Para os maiores valores de s obtemos a variação de pressão para os tempos curtos, enquanto que para os menores valores reproduzimos o seu comportamento decorrido um maior intervalo de tempo no domínio real.

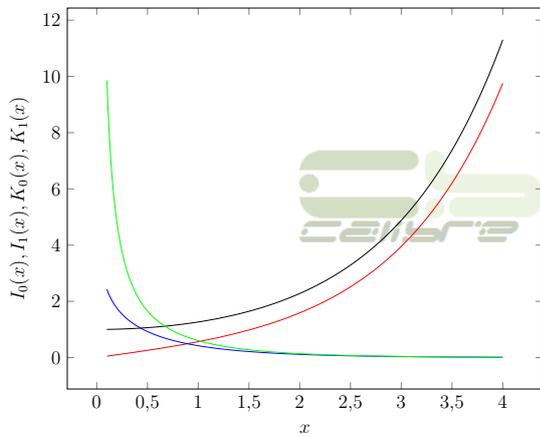


Figura 2: Funções modificadas de Bessel para $0,1 \leq x \leq 4$: $I_0(x)$ em preto, $I_1(x)$ em vermelho, $K_0(x)$ em azul e $K_1(x)$ em verde.

Como o estudo dos efeitos da estocagem, do dano à formação e do escoamento transiente são muito importantes na Análise de Testes de Pressão, é essencial que possamos avaliar as funções modificadas de Bessel para os maiores valores de s .

Neste trabalho, o cálculo das funções modificadas de Bessel é feito a partir das rotinas sugeridas em [24]. Nelas, é possível encontrar as relações de recorrência existente entre as funções, com K_0 sendo calculada empregando I_0 e K_1 uma vez conhecida I_1 .

Nos códigos numéricos implementados as funções e as variáveis foram declaradas como tendo dupla precisão, de modo que os ruídos oriundos do uso da precisão simples foram suprimidos e a faixa máxima para o valor do argumento das funções modificadas de Bessel passou de 95 para cerca de 600. Portanto, soluções mais acuradas puderam ser obtidas para tempos mais curtos no domínio do tempo. Além disso, não ocorreram problemas no que diz respeito à representação das derivadas de Bourdet.

As soluções são obtidas, conforme já visto, no domínio de Laplace. Portanto, a menos que algumas sim-

plicações sejam feitas, não encontramos as transformadas inversas de Laplace para as soluções aqui estudadas. Como consequência, somos obrigados a realizar a transformação inversa numericamente, a fim de obtermos a solução no domínio do tempo. Optamos, neste trabalho, por construir a biblioteca contendo as soluções analíticas mediante a utilização do algoritmo de Stehfest [27]. Esse algoritmo é suficientemente acurado, de modo que o mesmo é empregado na resolução de muitos problemas na engenharia de petróleo, onde a sua aplicação é muito difundida.

No algoritmo de Stehfest a função inversa é calculada por, já utilizando as variáveis em termos da variação de pressão,

$$\Delta p(t) = \frac{\ln(2)}{t} \sum_{i=1}^N V_i \overline{\Delta p} \left(\frac{\ln(2)}{t} i \right) \quad (63)$$

onde N é a quantidade de termos. Para problemas de escoamento utilizamos os valores pares no intervalo $6 \leq N \leq 18$. Os valores de V_i variam de acordo com a quantidade de termos e são determinados através da fórmula

$$V_i = (-1)^{\left(\frac{N}{2}\right)+i} \alpha, \quad (64)$$

onde

$$\alpha = \sum_{k=\frac{i+1}{2}}^{\min(i, \frac{N}{2})} \frac{k^{\frac{N}{2}} (2k)!}{\left(\frac{N}{2} - k\right)! k! (k-1)! (i-k)! (2k-i)!}. \quad (65)$$

Como exemplo, a Tabela 1 mostra os valores de V_i para $N = 10$. No código implementado é possível trabalharmos com os seguintes valores: $N = 8, 10, 12, 14$ e 16 .

Tabela 1 Coeficientes de V_i para $N = 10$

V_i	Valor
V_1	0,08333
V_2	-32,08333
V_3	1.279,0
V_4	-15.623,666
V_5	84.244,1666
V_6	-23.6957,5
V_7	375.911,666
V_8	-340.071,666
V_9	164.062,5
V_{10}	-32.812,5

A derivada de Bourdet [4], utilizada no gráfico diagnóstico, auxilia na identificação dos diferentes regimes de escoamento presentes no sistema poço-reservatório, ao evidenciar as mudanças na variação do comportamento da queda de pressão no poço. Existem diferentes fórmulas para a determinação dessa derivada. Aqui, adotamos o esquema a três pontos [21]

$$\left(\frac{d\Delta p_{wf}}{d \ln \Delta t} \right)_j = \Delta p'_{wf} = B_1 + B_2, \quad j \geq 2, \quad (66)$$



onde

$$B_1 = \frac{\Delta p_j - \Delta p_L}{\ln(\Delta t_j/\Delta t_L)} \ln(\Delta t_R/\Delta t_j) \quad (67)$$

e

$$B_2 = \frac{\Delta p_R - \Delta p_j}{\ln(\Delta t_R/\Delta t_j)} \ln(\Delta t_j/\Delta t_L) \quad (68)$$

onde $L = j - 1$, e $R = j + 1$, de forma que não calculamos a derivada no primeiro e no último tempo do registro de pressão.

Contudo, chamamos a atenção do leitor para o fato de que existem versões que utilizam dois pontos e outras que empregam a filtragem de dados, para que nem todas as informações sejam utilizadas no cálculo da derivada, com o objetivo de eliminar os ruídos quando da determinação da derivada para dados de campo [21].

5 Resultados

A Tabela 2 apresenta os dados que foram adotados como parâmetros padrão para a determinação da variação da queda de pressão para o Caso 1. Entretanto, algumas alterações podem ser feitas quando da análise de sensibilidade.

Tabela 2 Parâmetros do Caso 1

Dado	Valor
B	$1,50 \text{ m}^3/\text{std m}^3$
c	$1,00^{-8} \text{ Pa}^{-1}$
c_ϕ	$1,00^{-8} \text{ Pa}^{-1}$
h	20,00 m
k	$10,00^{-13} \text{ m}^2$
N	10
p_i	$30,00 \times 10^6 \text{ Pa}$
Q_{sc}	$10,00^{-3} \text{ std m}^3/\text{s}$
r	0,10 m
r_w	0,10 m
μ	0,01 Pa·s
ϕ	0,20

Na Figura 3 apresentamos o gráfico diagnóstico para o problema do escoamento para o Caso 1. Nele, é possível ver que capturamos o regime transiente. Observamos, também, que a derivada é representada na forma de um patamar, típico da encontrada para este tipo de escoamento em um gráfico diagnóstico [1].

Em seguida, obtivemos os resultados para o Caso 1 variando os valores da permeabilidade. Os resultados são mostrados nas Figuras 4 e 5. Conforme o esperado, quanto maior for a permeabilidade, menor será a queda de pressão necessária para que ocorra o escoamento para uma vazão de produção fixa. Por outro lado, quando a permeabilidade diminui, a queda de pressão deve aumentar de modo a suplementar a energia necessária para que o fluido se mova no reservatório apresentando, agora,

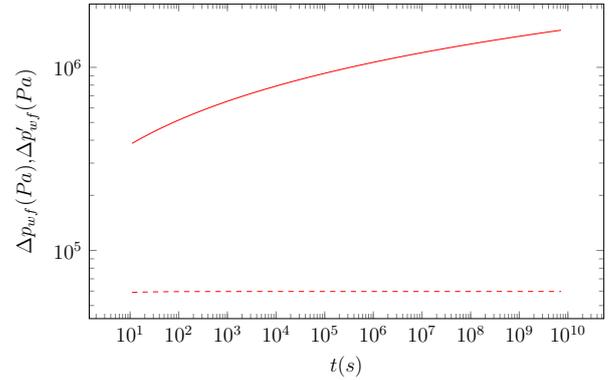


Figura 3: Gráfico diagnóstico para o Caso 1.

uma maior resistência ao escoamento. Tal comportamento pode ser observado na Figura 4, notando que a inclinação da reta associada ao transiente muda conforme a permeabilidade é alterada.

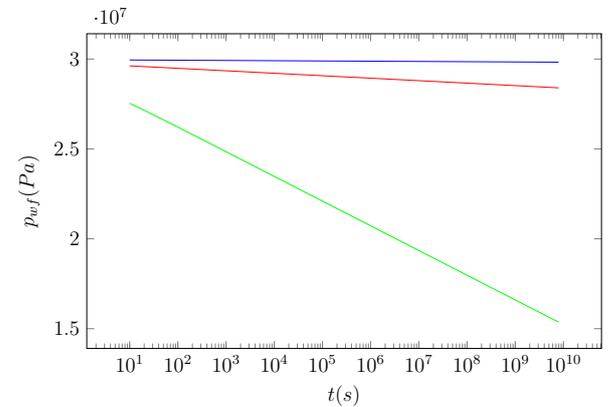


Figura 4: Gráfico especializado, Caso 1: $k = 10^{-14} \text{ m}^2$ em verde, $k = 10^{-13} \text{ m}^2$ em vermelho e $k = 10^{-12} \text{ m}^2$ em azul.

Em se tratando do gráfico diagnóstico, na Figura 5 é possível notarmos que todas as derivadas de Bourdet são representadas aproximadamente por linhas retas horizontais, referentes ao escoamento transiente. Contudo, esses patamares encontram-se em diferentes posições verticais devido à variação da permeabilidade.

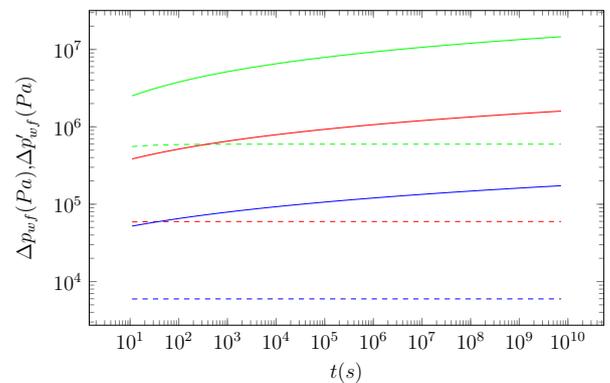


Figura 5: Gráfico diagnóstico, Caso 1: $k = 10^{-14} \text{ m}^2$ em verde, $k = 10^{-13} \text{ m}^2$ em vermelho e $k = 10^{-12} \text{ m}^2$ em azul.

As Figuras 6 e 7 trazem resultados em gráficos especializado e diagnóstico para diferentes valores da viscosidade do fluido. O efeito da variação da viscosidade é o inverso do relativo à permeabilidade, de modo que quanto maiores forem os valores da viscosidade, maiores serão as quedas de pressão no poço produtor para que ocorra o escoamento para uma vazão constante (Figura 6). Também percebemos que as derivadas seguem sendo aproximadas por linhas retas horizontais, características do sistema poço-reservatório considerado (Figura 7).

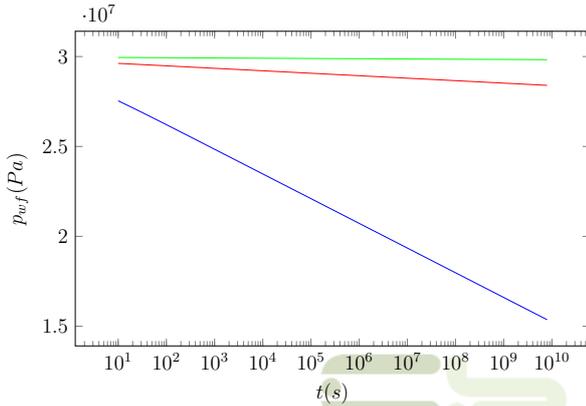


Figura 6: Gráfico especializado, Caso 1: $\mu = 10^{-4}$ Pa.s em verde, $\mu = 10^{-3}$ Pa.s em vermelho e $\mu = 10^{-2}$ Pa.s em azul.

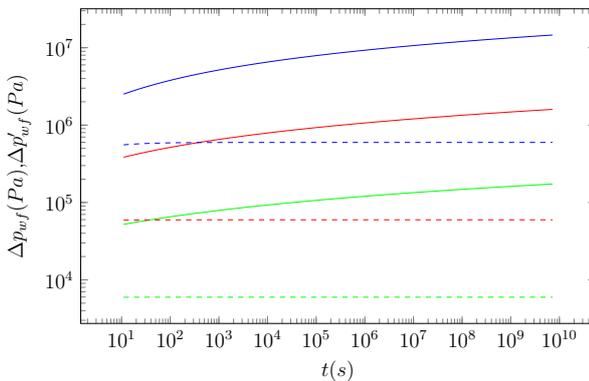


Figura 7: Gráfico diagnóstico, Caso 1: $\mu = 10^{-4}$ Pa.s em verde, $\mu = 10^{-3}$ Pa.s em vermelho e $\mu = 10^{-2}$ Pa.s em azul.

As Figuras 8 e 9 contêm, respectivamente, os gráficos especializado e diagnóstico para a situação na qual variamos os valores da porosidade. Para os maiores valores da porosidade existirá mais fluido disponível para a produção e a queda de pressão no poço se tornará menor para uma vazão fixa. Notamos que a alteração na porosidade não influencia na inclinação da reta relativa ao regime transiente, presente na Figura 8, e que há uma sobreposição das curvas representando as derivadas na Figura 9.

5.1 Resultados para o Caso 2

Os dados utilizados para encontrar soluções para o sistema poço-reservatório do Caso 2 podem ser vistos na

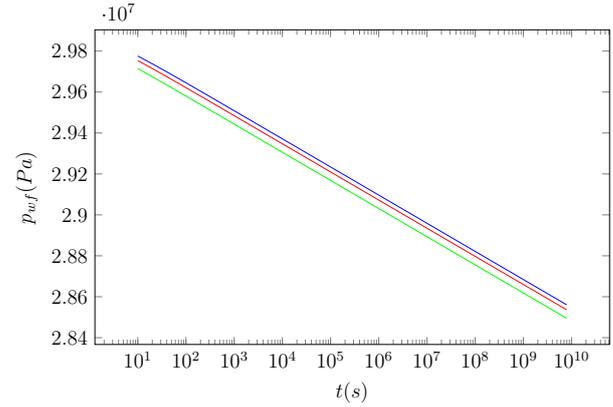


Figura 8: Gráfico especializado, Caso 1: $\phi = 0,1$ em verde, $\phi = 0,2$ em vermelho e $\phi = 0,3$ em azul.

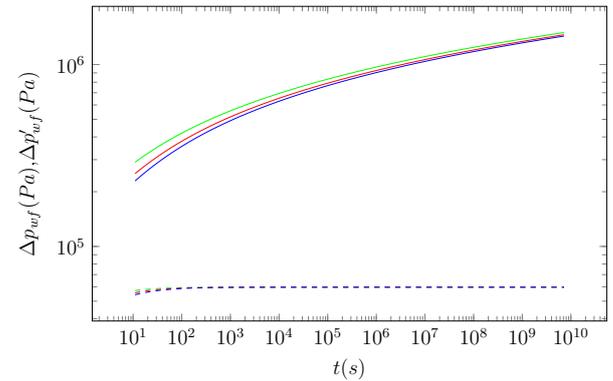


Figura 9: Gráfico diagnóstico, Caso 1: $\phi = 0,1$ em verde, $\phi = 0,2$ em vermelho e $\phi = 0,3$ em azul.

Tabela 3. No presente caso são incorporados os efeitos de fronteira. Podemos notar que houve uma redução na vazão em relação ao Caso 1, pois agora o reservatório é finito e possui fronteiras definidas, limitando a quantidade de fluido a ser produzida, diferentemente do Caso 1, cuja capacidade de produção depende da difusividade hidráulica, η .

Tabela 3 Parâmetros do Caso 2

Dado	Valor
B	$1,50 \text{ m}^3/\text{std m}^3$
c	$1,00^{-8} \text{ Pa}^{-1}$
c_ϕ	$1,00^{-8} \text{ Pa}^{-1}$
h	20,00 m
k	$10,00^{-13} \text{ m}^2$
N	10
p_i	$30,00 \times 10^6 \text{ Pa}$
Q_{sc}	$10,00^{-9} \text{ std m}^3/\text{s}$
r	0,10 m
r_e	100,00 m
r_w	0,10 m
μ	0,01 Pa.s
ϕ	0,20

A Figura 10 apresenta o gráfico diagnóstico com a variação da queda de pressão para o reservatório con-



siderado no Caso 2. É importante observar que por se tratar de um reservatório fechado, para uma dada região os resultados para a queda de pressão irão diferir dos do Caso 1, devido ao início dos efeitos de fronteira. Isso fica mais evidente se olharmos a derivada de Bourdet, que não mais apresenta somente um patamar e passa a ter um crescimento representado por uma reta vertical inclinada. Após transcorrido um determinado período tempo, o reservatório deixa de se comportar como se fosse infinito e o escoamento passa por um regime de transição, conhecido como regime transiente tardio, para, em seguida, entrar no regime denominado pseudo-permanente [1].

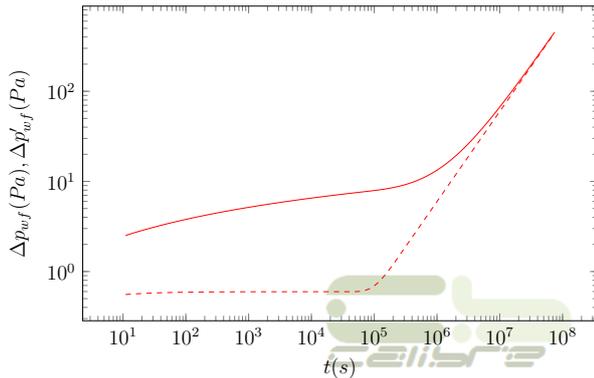


Figura 10: Gráfico diagnóstico para o Caso 2.

O efeito da variação do raio externo, para o Caso 2, pode ser percebido nos gráficos especializado e diagnóstico das Figuras 11 e 12. No gráfico especializado vemos que as soluções estão sobrepostas até que o efeito de fronteira ocorra, iniciando com o reservatório cilíndrico correspondente ao menor raio externo. A partir do gráfico diagnóstico, constatamos que as derivadas estão sobrepostas no regime transiente e se separam a partir do momento em que o efeito de fronteira começa a influenciar o escoamento. Também verificamos a sobreposição das curvas para $\Delta p_{wf}(Pa)$ e $\Delta p'_{wf}(Pa)$ até que os efeitos de fronteira comecem a se pronunciar, acarretando na separação de cada uma das curvas.

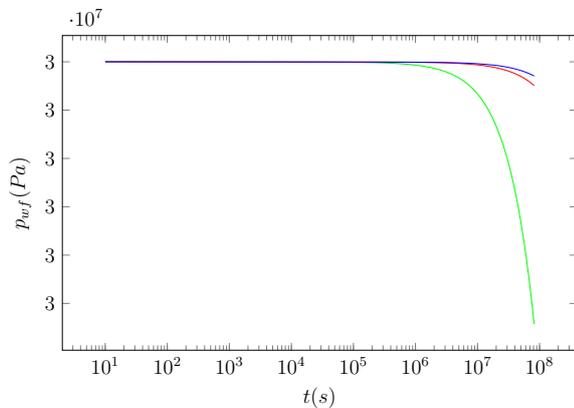


Figura 11: Gráfico especializado, Caso 2: $r_e = 30$ m em verde, $r_e = 100$ m em vermelho e $r_e = 130$ m em azul.

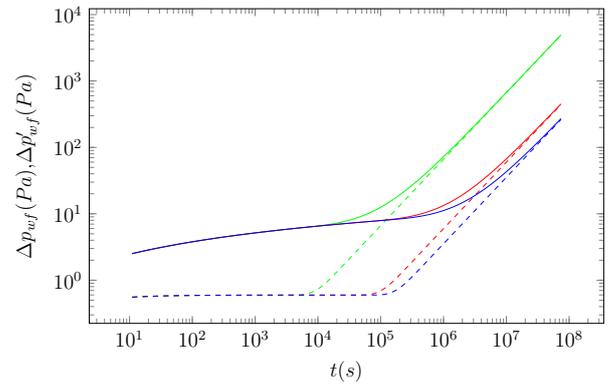


Figura 12: Gráfico diagnóstico, Caso 2: $r_e = 30$ m em verde, $r_e = 100$ m em vermelho e $r_e = 130$ m em azul.

Assim como o raio externo, a porosidade também modifica o tempo de transição entre os regimes de escoamento transiente para o pseudo-permanente. Através da análise das Figuras 13 e 14, vemos que os menores valores da porosidade antecipam a passagem para o regime pseudo-permanente. Tal efeito é uma consequência da alteração do valor η quando variamos a porosidade ϕ .

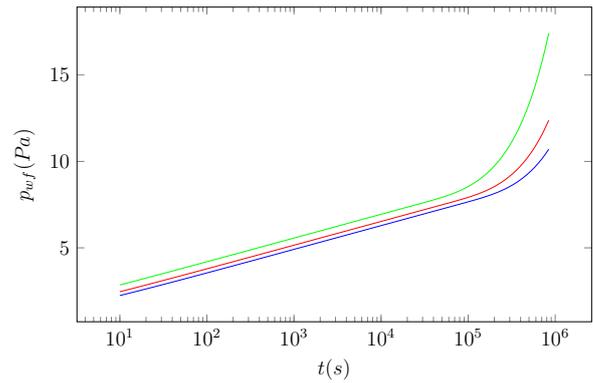


Figura 13: Variação de pressão, Caso 1: $\phi = 0,1$ em verde, $\phi = 0,2$ em vermelho e $\phi = 0,3$ em azul.

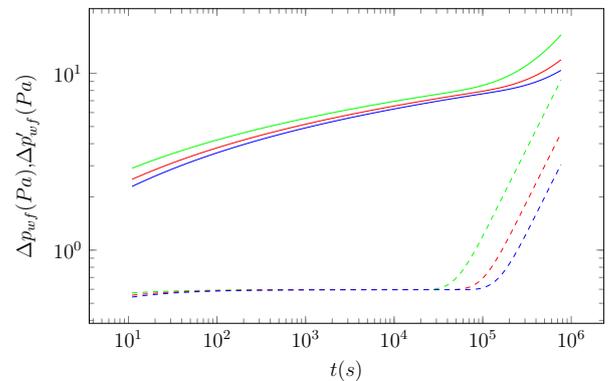


Figura 14: Gráfico diagnóstico, Caso 2: $\phi = 0,1$ em verde, $\phi = 0,2$ em vermelho e $\phi = 0,3$ em azul.



5.2 Resultados para o Caso 3

Nossa atenção agora está voltada para os efeitos de estocagem de poço e de dano à formação, que ocorrem nos primeiros instantes da produção. Os parâmetros utilizados para a previsão teórica da variação da perda de pressão no reservatório, para o Caso 3, são mostrados na Tabela 4.

Tabela 4 Parâmetros do Caso 3

Dado	Valor
B	$1,50 \text{ m}^3/\text{std m}^3$
c	$1,00^{-8} \text{ Pa}^{-1}$
c_ϕ	$1,00^{-8} \text{ Pa}^{-1}$
C	$10,00^{-3} \text{ m}^3/\text{Pa}$
h	$20,00 \text{ m}$
k	$10,00^{-13} \text{ m}^2$
N	10
p_i	$30,00 \times 10^6 \text{ Pa}$
Q_{sc}	$10,00^{-3} \text{ std m}^3/\text{s}$
r	$0,10 \text{ m}$
r_w	$0,10 \text{ m}$
S	$5,00$
μ	$0,01 \text{ Pa}\cdot\text{s}$
ϕ	$0,20$

A curva característica do comportamento da queda de pressão, para um reservatório com as características do Caso 3, é apresentada no gráfico diagnóstico da Figura 15. Chamamos a atenção para o comportamento diferenciado da derivada de Bourdet, que evidencia claramente os efeitos do dano à formação e da estocagem no poço. Os seus valores atingem um máximo e, em seguida, decrescem até atingir um valor que permanece praticamente constante.

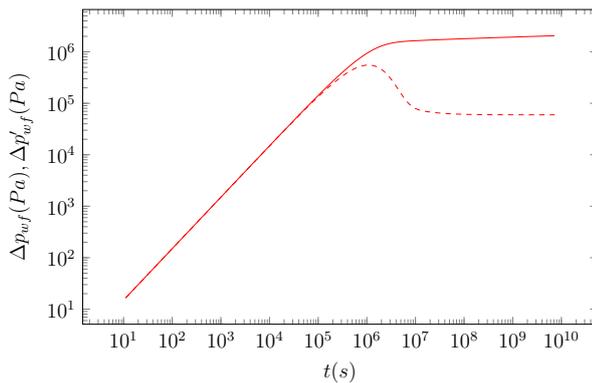


Figura 15: Gráfico diagnóstico para o Caso 3.

O efeito do dano à formação modifica a região da interface poço-reservatório, criando um efeito de película que acaba alterando as características do escoamento, pois resulta em uma maior resistência ao escoamento do fluido [1]. As Figuras 16 e 17 apresentam resultados para a variação da intensidade do dano à formação. Um aumento do coeficiente de dano gera uma maior restrição

ao escoamento, sendo necessário um Δp_{wf} maior para que a vazão de produção pré-fixada seja preservada. Os resultados dos gráficos corroboram tal previsão. A derivada de Bourdet também é influenciada pelo fenômeno de estocagem, que depende do valor de k , de forma que quanto menor a permeabilidade maior será a duração do efeito de estocagem no poço. A permeabilidade da região danificada também será menor do que a fora da região próxima da interface poço-reservatório.

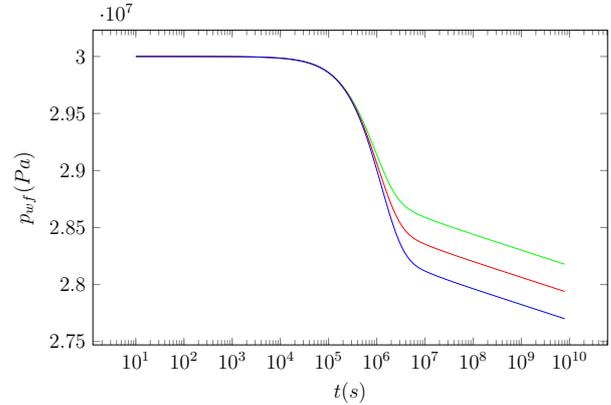


Figura 16: Gráfico especializado, Caso 3: $S = 3$ em verde, $S = 5$ em vermelho e $S = 7$ em azul.

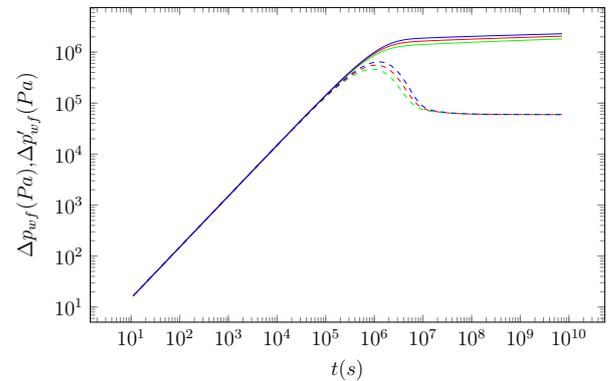


Figura 17: Gráfico diagnóstico, Caso 3: $S = 3$ em verde, $S = 5$ em vermelho e $S = 7$ em azul.

Quando do início da produção, em um sistema sob o efeito da estocagem, a variação de pressão está diretamente relacionada com as características do escoamento do fluido estocado no poço, sendo muito pequena a contribuição devida ao escoamento no interior do reservatório. Com o passar do tempo e a saída do fluido estocado, a vazão decorrente do movimento do fluido contido no interior do reservatório começará a subir. A partir de um determinado instante de tempo, a estocagem não interferirá mais na produtividade e a vazão passará a ser dominada pelo escoamento no reservatório [1]. Da Figura 18 podemos constatar, de maneira bem clara, a tardia queda de pressão causada pelo aumento do coeficiente de estocagem.

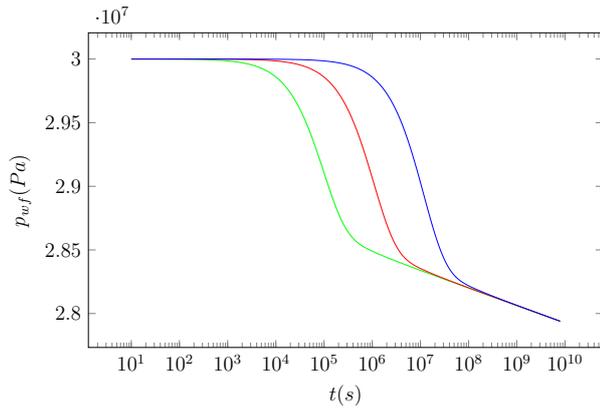


Figura 18: Gráfico especializado, Caso 3: $C = 10^{-4} \text{ m}^3/\text{Pa}$ em verde, $C = 10^{-3} \text{ m}^3/\text{Pa}$ em vermelho e $C = 10^{-2} \text{ m}^3/\text{Pa}$ em azul.

Ainda na Figura 18, a linha azul, correspondente ao maior coeficiente de estocagem ($C = 0,01 \text{ m}^3/\text{Pa}$) começará a apresentar uma queda de pressão significativa após aproximadamente 10^5 s , embora as curvas determinadas com valores menores desse coeficiente já tenham tido uma queda de pressão acentuada para instantes de tempo anteriores. Como pode ser visto, as curvas em vermelho ($C = 0,001 \text{ m}^3/\text{Pa}$) e em verde ($C = 0,001 \text{ m}^3/\text{Pa}$) mostram que a queda de pressão tem início decorridos aproximadamente 10^4 s e 10^3 s , respectivamente. É interessante notar que após cerca de 10^8 s as três curvas já se encontram sobrepostas umas as outras. Nesse momento, a vazão oriunda da estocagem já não estará mais contribuindo para a produção no reservatório. No caso do gráfico diagnóstico, Figura 19, vemos que as curvas encontram-se deslocadas. Portanto, percebemos que à medida que aumentamos o coeficiente de estocagem haverá um atraso na contribuição do reservatório na produção, evidenciada pelo demora no começo do regime transiente em meio poroso.

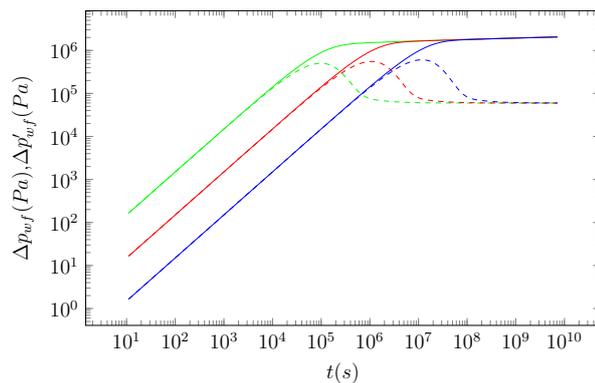


Figura 19: Gráfico diagnóstico, Caso 3: $C = 10^{-4} \text{ m}^3/\text{Pa}$ em verde, $C = 10^{-3} \text{ m}^3/\text{Pa}$ em vermelho e $C = 10^{-2} \text{ m}^3/\text{Pa}$ em azul.

Nas Figuras 20 e 21, respectivamente para os gráficos especializado e diagnóstico, podemos quantificar a importância da variação do número de termos N no algoritmo de Stehfest. Apesar das curvas estarem pratica-

mente sobrepostas, na literatura encontramos relatos de casos nos quais diferentes valores de N interferiram fortemente na acurácia dos resultados para outros sistemas poço-reservatório [22].

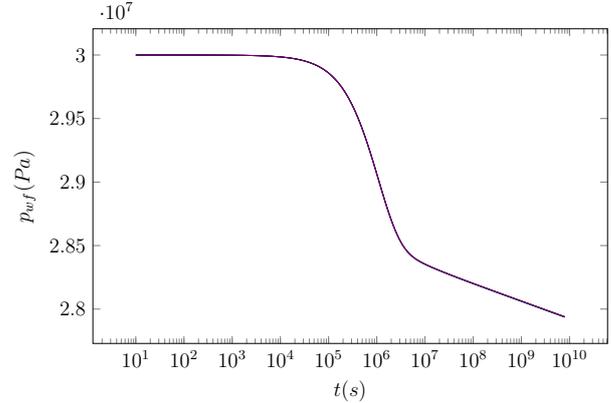


Figura 20: Gráfico especializado, Caso 3: $N = 8$ em verde, $N = 10$ em vermelho, $N = 12$ em azul, $N = 14$ em preto e $N = 16$ em roxo.

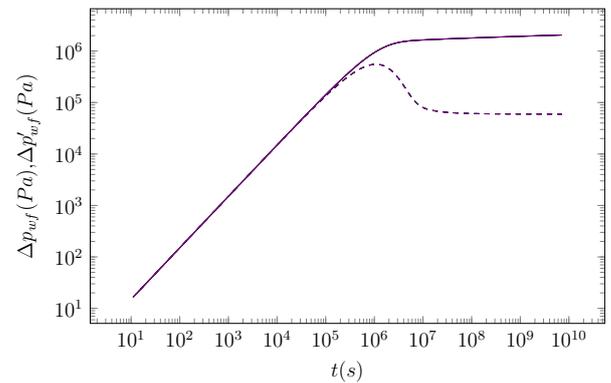


Figura 21: Gráfico diagnóstico, Caso 3: $N = 8$ em verde, $N = 10$ em vermelho, $N = 12$ em azul, $N = 14$ em preto e $N = 16$ em roxo.

5.3 Resultados para o Caso 4

Na Tabela 5 encontram-se os dados utilizados nas simulações levando em conta o Caso 4. Nele, a correção sugerida por Chen e Raghavan [7] foi utilizada no algoritmo de Stehfest, visando a se reproduzir corretamente o registro da variação de pressão em uma sequência de produção e fechamento do poço.

A variação da queda de pressão pode, então, ser vista na Figura 22. Este sistema poço-reservatório possui as mesmas características de escoamento que as do Caso 3. No entanto, nos testes realizados, na fase de produção, o poço é mantido aberto por um determinado tempo, t_p , e a vazão de produção é mantida constante. Esse procedimento (a produção) causará uma diminuição da pressão no poço e no reservatório. Após transcorrido o tempo t_p ,



Tabela 5 Parâmetros do Caso 4

Dado	Valor
B	$1,50 \text{ m}^3/\text{std m}^3$
c	$1,00^{-8} \text{ Pa}^{-1}$
c_ϕ	$1,00^{-8} \text{ Pa}^{-1}$
C	$10^{-3} \text{ m}^3/\text{Pa}$
h	$20,00 \text{ m}$
k	10^{-13} m^2
N	10
p_i	$30,00 \times 10^6 \text{ Pa}$
Q_{sc}	$10^{-3} \text{ std m}^3/\text{s}$
r	$0,10 \text{ m}$
r_w	$0,10 \text{ m}$
S	$5,00$
t_p	4320000 s
μ	$0,01 \text{ Pa}\cdot\text{s}$
ϕ	$0,20$

o poço é fechado e a pressão tenderá a retornar à pressão inicial, antes da abertura do mesmo. Entretanto, isso não ocorrerá devido à perda de fluido durante a fase de estática (poço fechado).

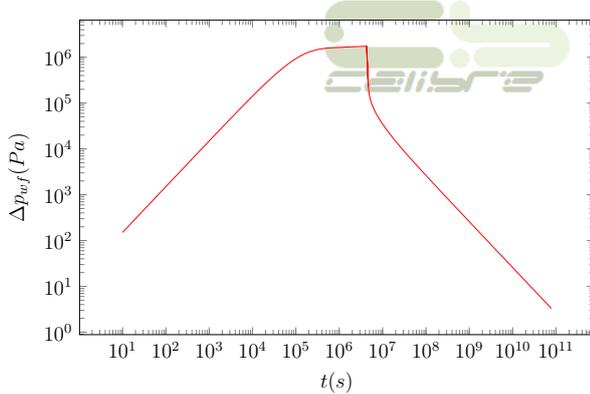
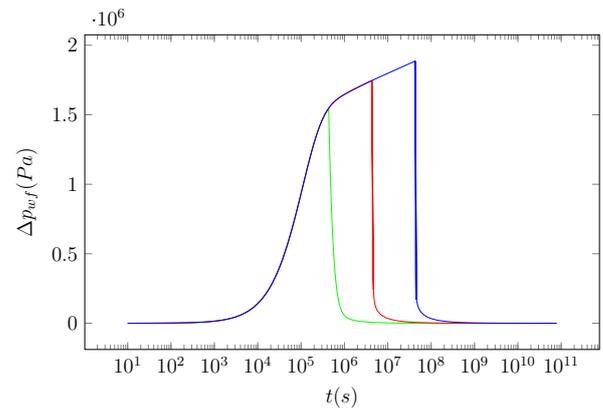
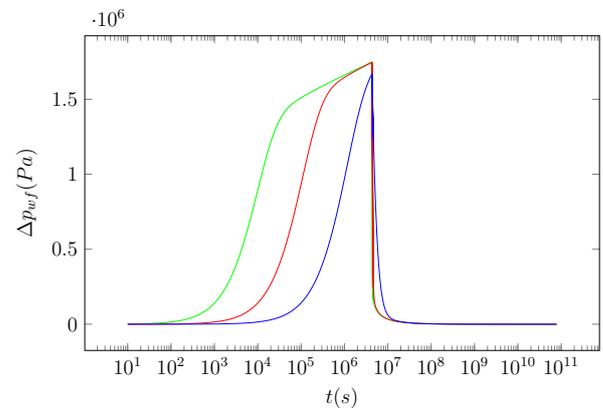
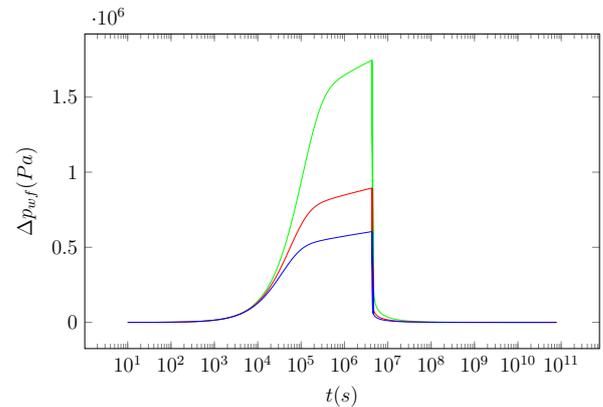


Figura 22: Variação de pressão, Caso 4.

Em contrapartida, a Figura 23 mostra como a variação de pressão no poço muda quando modificamos o de tempo de produção t_p . Notamos que as curvas descrevem qualitativamente o mesmo tipo de comportamento, à exceção do tempo no qual se inicia o processo de recuperação de pressão.

Por outro lado, conforme já vimos, a modificação do coeficiente de estocagem C altera o início da produção e, também, o comportamento da pressão no período de poço fechado, como pode ser visto na Figura 24. Portanto, quanto maior for o coeficiente C maior será o tempo necessário para que aconteça o reequilíbrio de pressão.

No que diz respeito à variação dos valores da permeabilidade, o efeito de estocagem se torna mais significativo tanto na abertura quanto no fechamento do poço. No caso do fechamento do poço, o fluido oriundo do reservatório que já estava se deslocando, antes da etapa de fechamento, continuará a alcançar o poço mesmo após a interrupção da produção. Tal fato se reflete no gráfico da variação da pressão no poço, Figura 25.


 Figura 23: Variação de pressão, Caso 4: $t_p = 43,2 \cdot 10^4 \text{ s}$ em verde, $t_p = 43,2 \cdot 10^5 \text{ s}$ em vermelho e $t_p = 43,2 \cdot 10^6 \text{ s}$ em azul.

 Figura 24: Variação de pressão, Caso 4: $C = 10^{-4} \text{ m}^3/\text{Pa}$ em verde, $C = 10^{-3} \text{ m}^3/\text{Pa}$ em vermelho e $C = 10^{-2} \text{ m}^3/\text{Pa}$ em azul.

 Figura 25: Variação de pressão, Caso 4: $k = 1 \times 10^{-13} \text{ m}^2$ em verde, $k = 2 \times 10^{-13} \text{ m}^2$ em vermelho e $k = 3 \times 10^{-13} \text{ m}^2$ em azul.

5.4 Resultados para o Caso 5

No Caso 5, utilizamos como valores padrão $N=10$, $\omega=0,01$ e $\lambda=5 \cdot 10^{-8}$. A Figura 26 mostra o gráfico diagnóstico com as curvas representativas do presente caso. Para um reservatório naturalmente fraturado, dois fatores, ω e λ , são utilizados na caracterização da mudança



de comportamento do escoamento no reservatório, causada pela presença das fraturas [28]. São consideradas duas porosidades distintas, uma para a fratura e outra para a matriz porosa do reservatório. Em se tratando das curvas da Figura 26, verificamos claramente a região de transição, na qual ambas a fratura e a matriz porosa influenciam o escoamento. No que diz respeito à variação de pressão, percebemos uma mudança através do surgimento de uma região de transição entre os dois trechos que se assemelham às curvas dos casos dos reservatórios homogêneos. Já para a curva da derivada de Bourdet, notamos a formação de um “vale” separando as duas regiões mencionadas previamente.

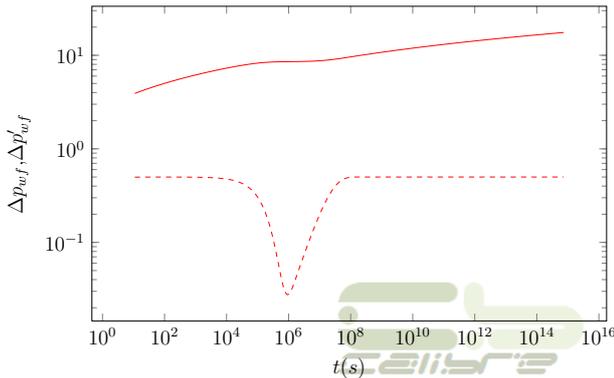


Figura 26: Gráfico diagnóstico, Caso 5.

Na Figura 27, temos o gráfico especializado com os resultados para a queda de pressão em função da variação dos valores de λ . Das curvas da figura fica claro que ele influencia na duração da transição, entre as regiões de predomínio do escoamento na fratura e na matriz porosa. Portanto, quanto maior o seu valor mais cedo ocorrerá a transição. Segundo Warren e Root [28], quando $\lambda \rightarrow \infty$ o reservatório tenderá a se comportar como um meio poroso homogêneo.

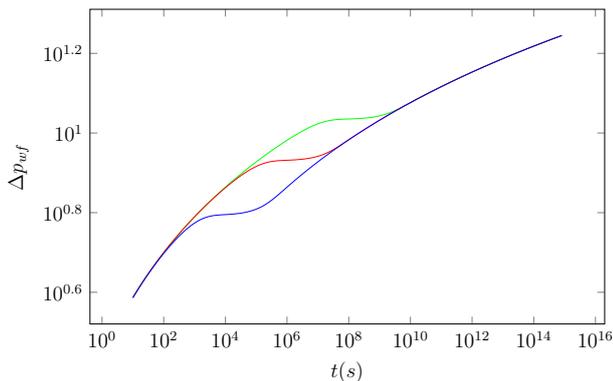


Figura 27: Variação de pressão, Caso 5: $\lambda = 5 \times 10^{-10}$ em verde, $\lambda = 5 \times 10^{-8}$ em vermelho e $\lambda = 5 \times 10^{-6}$ em azul.

Prosseguindo, no gráfico diagnóstico da Figura 28 verificamos que ao variarmos o valor de λ a posição do “vale” sofre uma translação. Um comportamento similar pode ser obtido a partir da coleta de dados de campo

e, por meio da resolução de um problema inverso, nos auxiliar na caracterização do sistema poço-reservatório através da determinação de uma estimativa para o valor de λ .

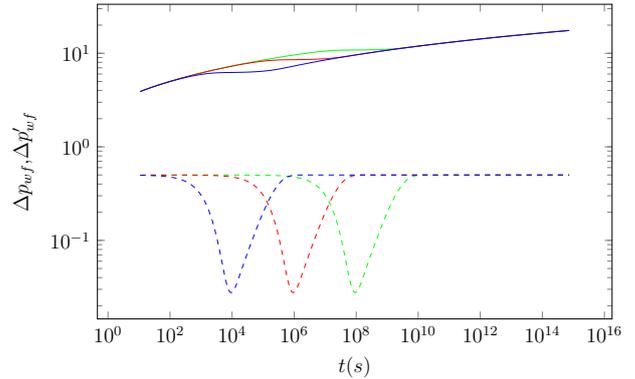


Figura 28: Gráfico diagnóstico, Caso 5: $\lambda = 5 \times 10^{-10}$ em verde, $\lambda = 5 \times 10^{-8}$ em vermelho e $\lambda = 5 \times 10^{-6}$ em azul.

Finalmente, nas Figuras 29 e 30 vemos os resultados determinados para diferentes valores de ω . No nosso entender, é evidente o seu papel na transição entre os regimes, sendo que a extensão das zonas de transição será maior para os menores valores de ω (Figura 29). Conforme discutido em Warren e Root [28], quando $\omega \rightarrow 1$ a porosidade primária (da fratura) terá uma menor influência, evidenciando o efeito da porosidade secundária (da matriz) e, então, o reservatório apresentará o comportamento de um meio homogêneo. Portanto, quanto menor o parâmetro ω , maior será a influência da fratura. Das curvas das derivadas de Bourdet (Figura 30), notamos que a curva associada ao valor $\omega = 0,1$ possui um comportamento mais próximo do verificado no Caso 1, onde o reservatório é infinito e não contém nenhuma fratura.

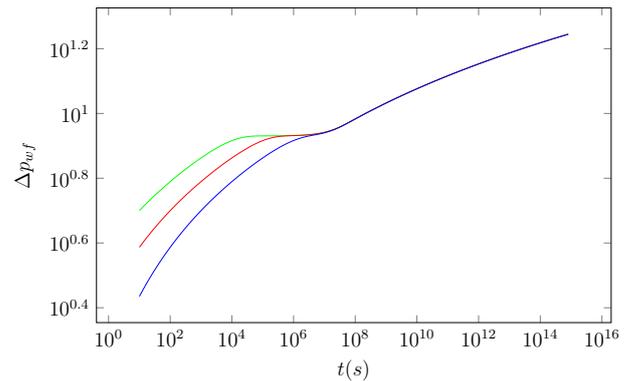


Figura 29: Variação de pressão, Caso 5: $\omega = 10^{-3}$ em verde, $\omega = 10^{-2}$ em vermelho e $\omega = 10^{-1}$ em azul.

6 Conclusões

O principal objetivo deste trabalho foi atingido, com a criação de uma biblioteca de códigos numéricos, no con-



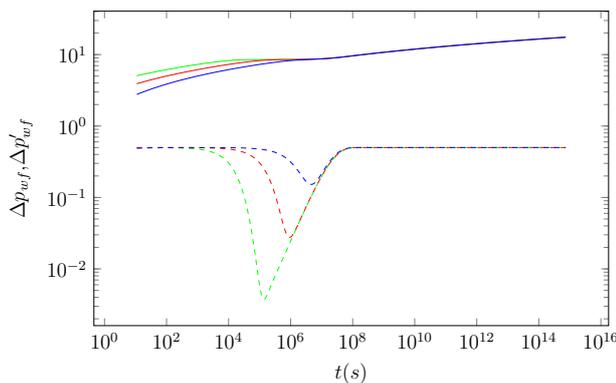


Figura 30: Gráfico diagnóstico, Caso 5: $\omega = 10^{-3}$ em verde, $\omega = 10^{-2}$ em vermelho e $\omega = 10^{-1}$ em azul.

texto da Análise de Testes de Pressão, baseados em algumas das mais conhecidas soluções analíticas disponíveis na literatura para a determinação da variação de pressão no poço produtor. Esses programas computacionais serão utilizados na verificação dos simuladores desenvolvidos no Laboratório de Modelagem Multiescala e Transporte de Partículas da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Por fim, os mesmos também podem ser empregados na caracterização dos sistemas poço-reservatório que se enquadrem nos casos aqui analisados, após uma ampliação dos códigos.

No que diz respeito à implementação dos códigos numéricos, podemos destacar a eliminação de pequenas oscilações nas derivadas de Bourdet e a ampliação da faixa de valores da frequência s , relevante na determinação da pressão no poço para tempos curtos, essenciais no âmbito da análise dos testes de pressão. A melhoria na captura dos resultados ocorreu pela utilização de valores de dupla precisão nas rotinas pesquisadas na literatura para o cálculo das funções modificadas de Bessel.

Em relação aos resultados obtidos, eles reproduziram satisfatoriamente os resultados esperados e conhecidos na literatura. Portanto, entendemos que logramos êxito na captura dos efeitos de fronteira, da estocagem no poço, do dano à formação, dos testes de produção e estática e da presença de fraturas naturais no conjunto poço-reservatório.

7 Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer o suporte financeiro fornecido pela FAPERJ.



Referências

- [1] Bourdet, D. (2002). Well Test Analysis: the Use of Advanced Interpretation Models. Handbook of Petroleum Exploration and Production 3. Elsevier, Amsterdam.
- [2] Adameka, V.; Vales, F.; Cerv, J. (2016). Numerical Laplace inversion in problems of elastodynamics: Comparison of four algorithms. Advances in Engineering Software, 113 , 1–10.
- [3] Awais, M. (2015). Applications of the numerical inversion of the Laplace transform to unsteady problems of the third grade fluid. Applied Mathematics and Computation, 250 , 228–234.
- [4] Bourdet, D.; Ayuob, J. A.; Pirard, Y. M. (1989). Use of pressure derivative in well-test interpretation. SPE Formation Evaluation, 19, 293–302.
- [5] Campos, R. G.; Huet, A. (2018). Numerical inversion of the Laplace transform and its application to fractional diffusion. Applied Mathematics and Computation, 327 , 70–234.
- [6] Chaudhry, A. U. (2004). Oil Well Testing Handbook. Gulf Professional Publishing, Burlington.
- [7] Chen, C. C.; Raghavan, R. (1996). An approach to handle discontinuities by the Stehfest algorithm. SPE Journal, 363.
- [8] Chen, S.; Liu, F.; Turner, I.; Hu, X. (2018). Numerical inversion of the fractional derivative index and surface thermal flux for an anomalous heat conduction model in a multi-layer medium. Applied Mathematical Modelling, 59, 514–526.
- [9] Dake, L. P. (2001). The Practice of Reservoir Engineering (Revised Edition). Amsterdam, The Netherlands: Elsevier, Developments in Petroleum Science, 36.
- [10] Dandekar, A. Y. (2013). Petroleum Reservoir Rock and Fluid Properties. USA: CRC Press.
- [11] Deleruyelle, F.; Bui, T. A.; Wong, H.; Dufour, N.; Tran, D. K.; Zhang, X. S. (2016). Analytical study of the post-closure behaviour of a deep tunnel in a porous creeping rock mass. Comptes Rendus Mécanique, 344, 649–660.
- [12] Du, X.; Lu, Z.; Li, D; Xu, Y.; Li, P.; Lu, D. (2019). A novel analytical well test model for fractured vuggy carbonate reservoirs considering the coupling between oil flow and wave propagation. Journal of Petroleum Science and Engineering, 173, 447–461.
- [13] Ertekin, T.; Abou-Kassem, J.; King, G. (2001). Basic Applied Reservoir Simulation. Society of Petroleum Engineers, Richardson, USA.



- [14] Fanchi, J. R. (2010). *Integrated Reservoir Asset Management*. Gulf Professional Publishing, Boston.
- [15] Hassanzadeh, H.; Pooladi-Darvish, M. (2007). Comparison of different numerical Laplace inversion methods for engineering applications. *Applied Mathematics and Computation*, 189, 1966–1981.
- [16] Huang, Y.; Cheng, S.; Yu, H.; He, Y.; Lin, B.; Feng, N. (2017). A semianalytical approach to estimate fracture closure and formation damage of vertically fractured wells in tight gas reservoir. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 150, 85–90.
- [17] Kamal, M. M. and Morsy, S. and Suleen, F. and Pan, Y. and Dastan, A. and Stuart, M. R. and Mire, E. and Zakariya, Z. (2019). Determination of in-situ reservoir absolute permeability under multiphase-flow conditions using transient well testing. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, 22 (1), 1–15.
- [18] Kazemi, H. (1969). Pressure transient analysis of naturally fractured reservoirs with uniform fracture distribution. *SPE Journal*, 9 (4).
- [19] Laribi, S.; Bertin, H.; Quintard, M. (1995). Two-phase calculations and comparative flow experiments through heterogeneous orthogonal stratified systems. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 12 (3), 183–199.
- [20] Li, Y.; Li, X.; Teng, S.; Wang, F.; Xu, D. (2014). A new changing wellbore storage model for pressure oscillation in pressure buildup test. *Journal of Natural Gas Science and Engineering*, 19, 350–357.
- [21] New Mexico Tech (2018). *Derivative Algorithms*.
- [22] Ozkan, E. (2008). *Applied Mathematics of Fluid Flow in Porous Media*.
- [23] Pouladi, B. and Sharifi, M. and Akbari, M. R. and Hosseini-Nasab, S. M. (2019). A new numerical well testing approach: Application to characterization of complex fault structures. *Petroleum*, 5, (3) 295–302.
- [24] Press, W. H. et al. (1992). *Numerical Recipes in C, The Art of Scientific Computing*, 2nd edition. Cambridge University Press, New York, USA.
- [25] Qiu, K.; Li, H. (2018). A new analytical solution of the triple-porosity model for history matching and performance forecasting in unconventional oil reservoirs. *SPE Journal*, 23 (6), 1–20.
- [26] Rosa, A. J.; Carvalho, R. S.; Xavier, J. A. (2006). *Engenharia de Reservatórios de Petróleo*. Interciência, Brasil.
- [27] Stehfest, H. (1970). Algorithm 368: Numerical inversion of Laplace Transform. *Communication of the ACM*, 1, 47–49.
- [28] Warren, J.; Root, P. (1963). The behavior of naturally fractured reservoirs. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 3 (3), 245–255.
- [29] Wendong, W.; Shahvali, M.; Yuliang, S. (2015). A semi-analytical fractal model for production from tight oil reservoirs with hydraulically fractured horizontal wells. *Fuel*, 158, 613–618.
- [30] Zeng, F.; Zhao, G. (2008). Semianalytical model for reservoirs with Forchheimer’s non-Darcy flow *Society of Petroleum Engineers Reservoir Evaluation & Engineering*, 11 (2), 280–291.



Influência da Densidade de Preenchimento e do Número de Perímetros nas Propriedades Mecânicas de Peças Fabricadas em PLA a Partir de Impressão 3D

Magno M. de Medeiros¹; Marlon C. da Silva¹; Daniella M. de Oliveira¹; Fábio D. R. dos Santos¹; Luanda Kívia de O. Rodrigues¹

¹Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia - IFBA - Salvador - BA, Brasil

Recebido: __22 Set 2020__ / Aceito: __16 Out 2020__ / Publicado: __20 Dez 2020__.

Resumo: Com a disseminação da manufatura aditiva por deposição de material fundido, popularmente conhecida como impressão 3D, fazem-se necessários estudos a respeito das propriedades mecânicas das peças fabricadas por este processo a fim de aumentar a compreensão do comportamento destes objetos e expandir os horizontes de aplicação da tecnologia na fabricação de itens que irão trabalhar sob solicitações mecânicas. Portanto, o objetivo deste artigo é analisar a influência de dois parâmetros de impressão (número de perímetros e densidade de preenchimento) sobre as propriedades mecânicas de corpos de prova fabricados em PLA a partir da impressão 3D. Para o estudo, os corpos de prova foram confeccionados a partir do filamento de PLA com diâmetro de 1,75 mm, por meio da técnica FDM, utilizando uma máquina 3D Cloner, modelo DH Plus, e submetidos ao ensaio de tração. A partir das análises efetuadas, foi possível constatar que o parâmetro “número de perímetros” é mais relevante no que tange a resistência mecânica à tração. Os resultados foram satisfatórios e permitem traçar paralelos interessantes com dados obtidos em outros estudos utilizados como referência na elaboração deste artigo.

Palavras-chave: PLA; impressão 3D; número de perímetros; densidade de preenchimento; propriedades mecânicas

Abstract: With the dissemination of the additive manufacturing by deposition of molten material, popularly known as 3D printing, studies on the mechanical properties of the pieces manufactured through this process are necessary to increase the understanding of their behaviors, as well as to know how to expand the application horizons of the technology in the manufacture of items that will work under mechanical stresses. Therefore, the aim of this article is to analyze the influence of two printing parameters (number of perimeters and filling density) on the mechanical properties of specimens manufactured in PLA from 3D printing. For the study, the specimens made of PLA filament with a diameter of 1.75 mm, using the FDM technique and a 3D Cloner DH Plus model machine, were submitted to tensile test. From the analyzes carried out, it was possible to verify that the number of perimeters is more relevant with regard to the mechanical resistance to traction. The results were satisfactory and allow to trace interesting parallels with the data obtained in other studies used as references in present work.

Key words: PLA; 3D printing; number of perimeters; filling density; mechanical properties

Nomenclatura

ASTM: American Society for Testing and Materials

CP: Corpo de Prova

FDM: Fused Deposition Modeling

PLA: Polylactic Acid

1. Introdução

A manufatura aditiva faz referência a uma gama de processos para fabricação de peças com geometrias complexas. Esses processos são classificados principalmente em relação à natureza da matéria-prima e à estratégia de deposição do material (Bakrani Balani et al., 2019).

Identifica-se o surgimento do processo de produção de peças por adição de material com o engenheiro físico Charles Hull em 1984, ano de solicitação da primeira patente do processo de estereolitografia que foi concedida em 1986 (Hull, 1986). Em seguida, o processo de deposição de material fundido chamado de FDM, do inglês Fused Deposition Modeling, é patenteado pela empresa Stratasys (Almeida, 2007). Desde então, diversas empresas produziram seus próprios modelos de máquinas de prototipagem, popularmente conhecidas como impressoras 3D, com funcionamento através da deposição de material fundido. As restrições de acesso ao processo de manufatura aditiva, devido aos custos dos equipamentos envolvidos e os conhecimentos necessários para a operação do maquinário, têm sido superadas na última década. O surgimento de projetos de código aberto e de baixo-custo, como o “RepRap project” de autoria do professor Adrian Bowyer da University of Bath (RU) possibilitam a democratização da tecnologia (Barreto, 2019). Uma

relação de custo de diferentes métodos é apresentada por Irwin et al., (2014).

Originalmente dedicada somente à produção rápida de protótipos, a impressão 3D tem encontrado aplicações não só no campo da prototipagem industrial, como também na arquitetura, confecção de objetos de decoração, brinquedos e utensílios, devido à grande versatilidade e à facilidade com que objetos complexos podem ser criados utilizando este tipo de maquinário. Até a fabricação por adição de tecidos humanos, processo conhecido como bioimpressão, é uma realidade no contexto da medicina regenerativa. Aplicações na indústria militar também emergem conforme a tecnologia é difundida e aprimorada (Gross et al., 2014).

De acordo com Raut et al (2014) o método FDM é um dos processos de manufatura aditiva mais utilizados na produção de protótipos e finalização de peças, consistindo em uma tecnologia que faz a extrusão do filamento termoplástico e o deposita camada por camada (Almeida, 2007). O avanço tecnológico dos materiais que compõem os filamentos termoplásticos possibilitou a ampliação das aplicações desta técnica. Os modelos mais comuns no mercado utilizam filamentos poliméricos, pela facilidade de manuseio e pelo custo de fabricação, em especial o Polylactic Acid (PLA), um polímero da família dos poliésteres alifáticos, geralmente produzido a partir de vegetais e considerado um polímero biodegradável (Choksia & Desaib, 2017). O PLA é classificado como um termoplástico que pode ter características de um material semicristalino ou amorfo, com propriedades reológicas e boa processabilidade térmica (Santana et al., 2016).

Contudo, observando o processo de Deposição de Material Fundido, percebe-se que ainda há muito a ser estudado no que diz respeito às propriedades mecânicas das peças fabricadas com impressão 3D. É necessário compreender a influência dos parâmetros

Autor correspondente: Magno M. de Medeiros, magno.morelli@gmail.com.

de impressão nas propriedades mecânicas das peças fabricadas por este método, a fim de garantir a segurança em aplicações que exijam algum tipo de esforço. Para Raut et al., (2014), no FDM, um dos fatores críticos é selecionar a orientação de construção do modelo, ou seja, estabelecer os parâmetros de impressão da peça, pois essas ações afetam o tempo de construção, o custo total e, o mais importante, as propriedades mecânicas do produto final. Assim, conhecendo os limites mecânicos das peças impressas, é possível aumentar a gama de aplicações da técnica de impressão 3D à medida em que se aumenta a eficiência econômica na produção das mesmas.

As impressoras 3D mais comumente disponíveis no mercado permitem a variação de parâmetros de impressão como a densidade de preenchimento, número de camadas de contorno, padrão de preenchimento e altura das camadas de impressão. Tais parâmetros estão intrinsecamente ligados, e a variação deles interfere nas características estéticas e mecânicas da peça produzida. A velocidade de impressão define a velocidade com que o cabeçote de extrusão percorre o caminho projetado pelo software para formação da peça, e conseqüentemente, o tempo que a camada impressa tem para resfriar antes da camada seguinte ser depositada. O diâmetro do cabeçote de extrusão é também ajustável e determina a vazão de material. A espessura da camada, também chamada de resolução, é a altura de cada camada impressa. Quanto mais fina for a altura de cada camada, mais camadas serão necessárias para a conclusão da impressão. Já a espessura do extrusor varia conforme a velocidade de impressão e a espessura desejada das camadas. Christiyani et al. (2016) demonstram em seus estudos que a tensão de ruptura do material é inversamente proporcional a velocidade de impressão, e que esse efeito é agravado pela menor espessura da camada.

Atualmente a criação de modelos com impressoras 3D é um processo bastante empírico, e os limites da manufatura aditiva 3D ainda não estão bem definidos.

O objetivo deste artigo é analisar a influência dos parâmetros de impressão citados sobre a resposta de um corpo de prova de PLA fabricado pelo processo de impressão 3D por extrusão, através de ensaios mecânicos de tração, análises de material consumido, tempo de impressão e custos envolvidos no processo de fabricação, relacionando a viabilidade econômica da fabricação 3D com a resistência mecânica à tração apresentada pelos corpos de prova.

2. Materiais e Métodos

Foi adotado um procedimento para análise das propriedades mecânicas do material polimérico a partir da realização de ensaios de tração, com o objetivo de avaliar a combinação de parâmetros de impressão e sua influência no comportamento da peça final. Para modelagem do corpo de prova, foi utilizado o software SolidWorks e, quanto às dimensões, foram seguidas as determinações da norma ASTM D638.

Os corpos de prova analisados foram fabricados com filamento de PLA com diâmetro de 1,75 mm, a pela técnica FDM, utilizando uma máquina modelo DH Plus do fabricante 3D Cloner, que possui área de impressão de 320 x 320 x 400 mm e bico extrusor com diâmetro de 0,40 mm. Seguindo as orientações do fabricante do material, a configuração adotada para a temperatura da mesa aquecida foi de 60°C e a temperatura de extrusão limitada entre 190°C e 210°C. De acordo com Santana et al. (2018), o PLA sem qualquer tipo de pigmentação possui propriedades melhores que o PLA pigmentado. Para realização do trabalho foi utilizado material pigmentado e por isso foi importante usar como referência as propriedades do fabricante. Essas propriedades do filamento de PLA utilizado na impressão das peças estão indicadas na Tabela 1.

Tabela 1 - Propriedades do filamento de PLA.

Temperatura de Preparação	190-210°C
Densidade	1,24 g/cm ³

Temperatura de distorção	56°C
Tensão de Resistência	65 MPa
Alongamento até a ruptura	8%

A impressora 3D e o material utilizado para fabricação das amostras foram cedidos pelo Polo de Inovação Salvador, unidade especial do Instituto Federal da Bahia.

A determinação do número de corpos de prova ensaiados observou o princípio estatístico multiplicativo, adotando-se que o número de corpos de prova utilizados seria $2k$, onde k é o número de parâmetros de impressão analisados. Logo, utilizando variações de dois parâmetros de impressão, densidade de preenchimento e número de perímetros, chegou-se a um total de quatro corpos de prova para realização da análise. A ordem de fabricação dos corpos de prova e realização do ensaio de tração foi determinada de maneira aleatória.

Os parâmetros de impressão combinados e analisados foram a densidade de preenchimento e o número de perímetros. O valor de densidade de impressão variou entre 40% e 70%. Os números de perímetros utilizados foram 2 e 5. Os parâmetros-padrão de preenchimento e altura de camada foram mantidos constantes nos quatro corpos de prova. Na Tabela 2 são mostrados os parâmetros de impressão que variaram para fabricação de cada corpo de prova.

Tabela 2 – Parâmetro de impressão.

Corpo de Prova	Densidade de preenchimento	Número de Perímetros
CP 1	40%	2
CP 2	40%	5
CP 3	70%	2
CP 4	70%	5

Foram realizados ensaios de tração com os corpos de prova produzidos por impressão 3D. A máquina de tração utilizada é do modelo DL30000 do fabricante Emic, e possui capacidade de carga de até 30.000 kgf. O equipamento pertence ao Departamento Acadêmico de Tecnologia Mecânica do Instituto Federal da Bahia, campus Salvador. O ensaio destrutivo, mostrado na Figura 1, foi realizado a uma velocidade de 5 mm/min de acordo com a ASTM D638, que determina a velocidade do ensaio para o layout do corpo de prova utilizado.



Figura 1 - Ensaio de tração (acervo dos autores).

É importante salientar que as propriedades mecânicas do polímero PLA são conhecidas e certificadas pelo fabricante do filamento, e o objetivo da análise realizada é determinar as propriedades mecânicas de peças fabricadas a partir do processo de impressão 3D e comprovar, ou não, que estas propriedades sofrem variação em virtude da

combinação dos parâmetros definidos durante a manufatura.

3. Resultados e Discussões

Os resultados do ensaio de tração podem ser observados na Figura 2. Dessa maneira, foi possível compará-los quando a densidade é mantida em dois valores distintos e varia-se apenas o número de camadas, assim como na situação oposta, quando se mantém o número de camadas constante e varia-se a densidade de preenchimento.

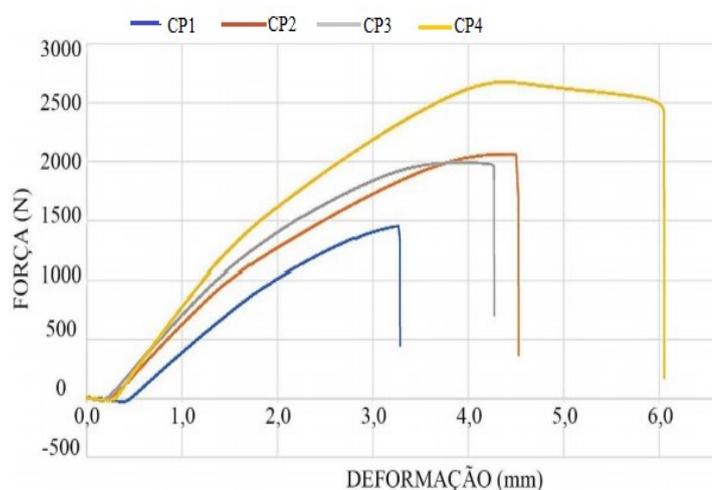


Figura 2 - Diagrama de força versus deformação.

A partir da análise do diagrama de força versus deformação, foi possível verificar que, apesar do PLA ser um termoplástico, as amostras apresentaram um comportamento semelhante aos termofixos e rompeu por fratura frágil em todos os casos. Isso foi afirmado com base, principalmente, nos valores de tensão máxima e tensão de ruptura que se apresentaram iguais ou próximos. Os gráficos apresentados na Figura 2 não apresentam zona de escoamento bem definida, o que dificulta a identificação do ponto de separação da deformação elástica da deformação plástica. Por isso foi necessário associar o comportamento exibido nos gráficos com as

informações que constam na Tabela 3. Essa mudança de comportamento do material para a peça impressa ratifica a teoria de que há influência dos parâmetros de processamento nas propriedades mecânicas das peças produzidas por impressão 3D. Tal mudança de comportamento do material dúctil para uma peça frágil pode ser devida aos espaços vazios formados pela impressão 3D.

Na Figura 2 é possível observar que para CP 1, com densidade de preenchimento de 40% e número de camadas 2, a força de ruptura suportada foi de 1450,61 N com uma deformação máxima de 2,79 mm. Já para CP 2, construída com as mesmas características CP 1 exceto pelo número de camadas que passou a ser 5, observou-se que a força de ruptura do material foi de 2061,01 N com uma deformação máxima de 4,20 mm. Sendo assim, houve um aumento da força máxima.

Analisando os gráficos de CP 3 e CP 4, com número de camadas 2 e 5, respectivamente, e ambos com 70% de padrão de preenchimento, observou-se que para o CP 3 a força de ruptura foi de 1977,86 N e a máxima deformação foi de 4,02 mm. Já para CP 4, a força de ruptura e a deformação máxima correspondem a 2444,95 N e 5,75 mm, respectivamente. A partir do ensaio de tração foi possível também determinar os dados dispostos na Tabela 3.

Analisando a Tabela 3, foi possível verificar que o CP 1 possui uma tensão de ruptura igual a tensão máxima, indicando que não há ductilidade. Esse comportamento é comum aos polímeros termofixos. Apesar do corpo de prova ter sido construído a partir do PLA, que é um polímero termoplástico, pode-se afirmar que a peça impressa apresentou um comportamento termofixo. Nos demais corpos de prova, este comportamento não foi identificado, pois a tensão máxima é maior que a tensão de ruptura, indicando que o material deforma antes do rompimento.

Tabela 3 - Propriedades mecânicas obtidas a partir do ensaio de tração.

Corpo de Prova	Tensão de ruptura (MPa)	Deformação de ruptura (mm)	Tensão Máxima (MPa)	Módulo de elasticidade (MPa)
CP 1	15.46	2.79	15.46	6155.12
CP 2	21.96	4.20	21.98	7343.75
CP 3	21.08	4.02	21.24	7857.75
CP 4	26.05	5.75	28.52	9404.83

Ao comparar CP 1 e CP 2, ambos com 40% de densidade de preenchimento, verificou-se que aumentando o número de camadas de impressão de 2 para 5 conferiu-se maior ductilidade ao material, fato comprovado pelo aumento da capacidade de deformação da peça. Além disso, percebeu-se o aumento da tensão de ruptura, da tensão máxima e do módulo de elasticidade dos corpos de prova. O crescimento da tensão de ruptura do CP 1 para o CP 2 foi de aproximadamente 42% somente devido ao aumento do número de perímetros.

Aumentos da deformação máxima, da tensão máxima e da tensão de ruptura foram observados, também, quando comparados CP 3 e CP 4, ambos com 70% de densidade de preenchimento. Ao relacionar o CP 1 com o CP 3 foi possível verificar um aumento da ductilidade, da tensão de ruptura, da tensão máxima e do módulo de elasticidade das amostras. A diferença entre eles está na densidade de preenchimento que variou de 40% para 70%, com o mesmo número de camadas, 2. Neste caso, o crescimento da tensão de ruptura devido ao aumento no número de perímetros, para o mesmo valor de densidade de preenchimento, foi de 23,57%. Sendo assim o aumento do número de perímetros foi mais significativo para o aumento da

tensão de ruptura na configuração com menor padrão de preenchimento.

Analisando os dados CP 2 e CP 4, ambos com 5 camadas, e variando a densidade de preenchimento de 40% para 70%, respectivamente, também foram verificados aumentos entre a tensão de ruptura e a tensão máxima, porém, pouco significativos. O ganho na tensão de ruptura devido ao aumento da densidade de preenchimento foi de 18,62%. Agora, comparando os valores das propriedades mecânicas apresentadas na Tabela 3 para o CP 2 e o CP 3, é possível verificar que são próximos, apesar das peças terem sido fabricadas com configurações distintas. A diferença no valor da tensão de ruptura é de 4,17%. Com uma diferença pouco expressiva como essa, a decisão de qual a melhor configuração de impressão pode ser influenciada por outras variáveis como tempo de impressão ou consumo de material.

4. Conclusão

A partir do ensaio de tração e das análises comparativas entre as amostras foi possível concluir que, para as condições analisadas, houve influência dos parâmetros de impressão 3D sobre as propriedades mecânicas quando aplicado o ensaio de tração. Do CP 1 para o CP 4 houve um aumento da tensão de ruptura de 68,49%. O número de perímetros e a densidade de preenchimento quando elevados conferiu maiores módulos de elasticidade às peças finais, garantindo melhor resistência mecânica em peças mais densas.

Como sugestão para trabalhos futuros é importante avaliar estes mesmos parâmetros sob novas configurações, além de avaliar novos parâmetros de impressão e realizar ensaios sobre configurações com menor quantidade de espaços vazios para verificar se o comportamento das peças continua frágil. Adicionalmente, seria interessante realizar outros ensaios mecânicos como os de flexão, compressão e impacto.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao IFBA e ao Polo de Inovação de Salvador pela impressão 3D dos corpos de prova.

Referências

- Almeida, W. J. (2007). *Otimização estrutural de protótipos fabricados pela tecnologia FDM utilizando o método de elementos finitos* Dissertação (Mestrado em Engenharia dos Materiais). Universidade de São Paulo.
- Bakrani Balani, S., Chabert, F., Nassiet, V., & Cantarel, A. (2019). Influence of printing parameters on the stability of deposited beads in fused filament fabrication of poly(lactic) acid. *Additive Manufacturing*, 25, 112–121. <https://doi.org/10.1016/j.addma.2018.10.012>
- Barreto, L. C. (2019). *Desenvolvendo impressora 3D de materiais pastosos* Dissertação (Mestrado em Arquitetura e Urbanismo), Universidade de Brasília.
- Choksia, N., & Desaib, H. (2017). Synthesis of Biodegradable Polylactic Acid Polymer By Using Lactic Acid Monomer. *International Journal of Applied Chemistry*, 13, 377–384.
- Christiyan, K. G. J., Chandrasekhar, U., & Venkateswarlu, K. (2016). A study on the influence of process parameters on the Mechanical Properties of 3D printed ABS composite. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 114, 012109. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/114/1/012109>
- Gross, B. C., Erkal, J. L., Lockwood, S. Y., Chen, C., & Spence, D. M. (2014). Evaluation of 3D Printing and Its Potential Impact on Biotechnology and the Chemical Sciences. *Analytical Chemistry*, 86(7), 3240–3253
- <https://doi.org/10.1021/ac403397>
- Hull, C. W. (1986). *Apparatus for production of three-dimensional objects by stereolithography* (United States Patent No. US4575330A). Disponível em: <https://patents.google.com/patent/US4575330/en> Acesso em 19 jul 2020
- Irwin, J. L., Pearce, J., Anzalone, G., & Oppliger, D. (2014, January 1). *The reprop 3-D printer revolution in STEM education*. ASEE Annual Conference and Exposition, Conference Proceedings.
- Raut, S., Jatti, V. S., Khedkar, N. K., & Singh, T. P. (2014). Investigation of the Effect of Built Orientation on Mechanical Properties and Total Cost of FDM Parts. *Procedia Materials Science*, 6, 1625–1630. <https://doi.org/10.1016/j.mspro.2014.07.146>
- Santana, L., Alves, J. L., Sabino Netto, A. da C., & Merlini, C. (2018). A comparative study between PETG and PLA for 3D Printing through thermal, chemical and mechanical characterization. *Matéria (Rio de Janeiro)*, 23(4). <https://doi.org/10.1590/s1517-707620180004.0601>
- Santana, L., Merlini, C., Barra, G. M. de O., Ahrens, C. H., & Netto, A. da C. S. (2016). Avaliação da composição química e das características térmicas de filamentos de pla para impressoras 3d de código aberto. *Anais. IX Congresso Nacional de Engenharia Mecânica*, Fortaleza.